

الصف الثانى الإعدادى 2

الفصل الدراسى الأول

الرياضيات

2026

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد والعمليات عليها



الوحدة الثانية: التحليل



الوحـدة الثالثة: الهندسة



الوحـدة الرابعة: الإحصـاء



رموز وأساسيات رياضية

Q	مجموعة الأعداد النسبية	(∞)	ما لا نهاية
$Q`$	مجموعة الأعداد غير النسبية	$(-\infty)$	سالب ما لا نهاية
R	مجموعة الأعداد الحقيقية	$X \cup Y$	X اتحاد Y
$\sqrt{}$	الجـــذر التربيعـى الموجب	$X \cap Y$	X تقاطع Y
$\sqrt[3]{}$	الجـــذر التكعيبى	$X - Y$	X فرق Y
$\approx$	تقـريبـًا	$X`$	مكملة المجموعة X
$\neq$	لايساوى	a^n	a مرفوعة للأس n
$\notin$	لا تنتمـــى	$\cong$	تطابق
$\|a\|$	القيمة المطلقة للعدد a	$\because$	بما أن
$\{\ \}$ أو $\varnothing$	فاى (المجموعة الخالية)	$\therefore$	إذن
π	النسبة التقريبية $\pi \approx 3.14159254$	$\perp$	عمودى على
φ	النسبة الذهبية $\varphi \approx 1.618033989$	$//$	يوازى
$0.\overline{2}$	العدد 0.2 هو عدد عشرى غير منته (دائر) وهو عدد نسبى يساوى $\frac{2}{9}$	$\overline{x}$	الوسط الحسابى
$[a , b]$	فترة مغلقة	Σf	مجموع التكرارات
$]a , b[$	فترة مفتوحة	x_m	مركز المجموعة
$]a , b]$	فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$\Sigma (f.x_m)$	مجموع حواصل ضرب مركز كل مجموعة (x_m) فى التكرار المناظر لها (f)
$[a , b[$	فترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة	Q_2	الوسيط

الوحدة الأولى 1

الأعداد والعمليات عليها



دروس الوحدة

تمثل الأعداد الحقيقية البنية الأساسية لجميع العمليات الرياضية داخل أنظمة الذكاء الاصطناعى، ومن دونها لا نستطيع تمثيل العالم الواقعى بدقة؛ لذا فإن العلاقة بين الذكاء الاصطناعى والأعداد الحقيقية هى علاقة تكامل أساسى بين الرياضيات والتكنولوجيا.

- **فهل يمكن تطوير دور الأعداد الحقيقية فى بناء وتدريب خوارزميات الذكاء الاصطناعى؟**

القضايا والمهارات الحياتية:

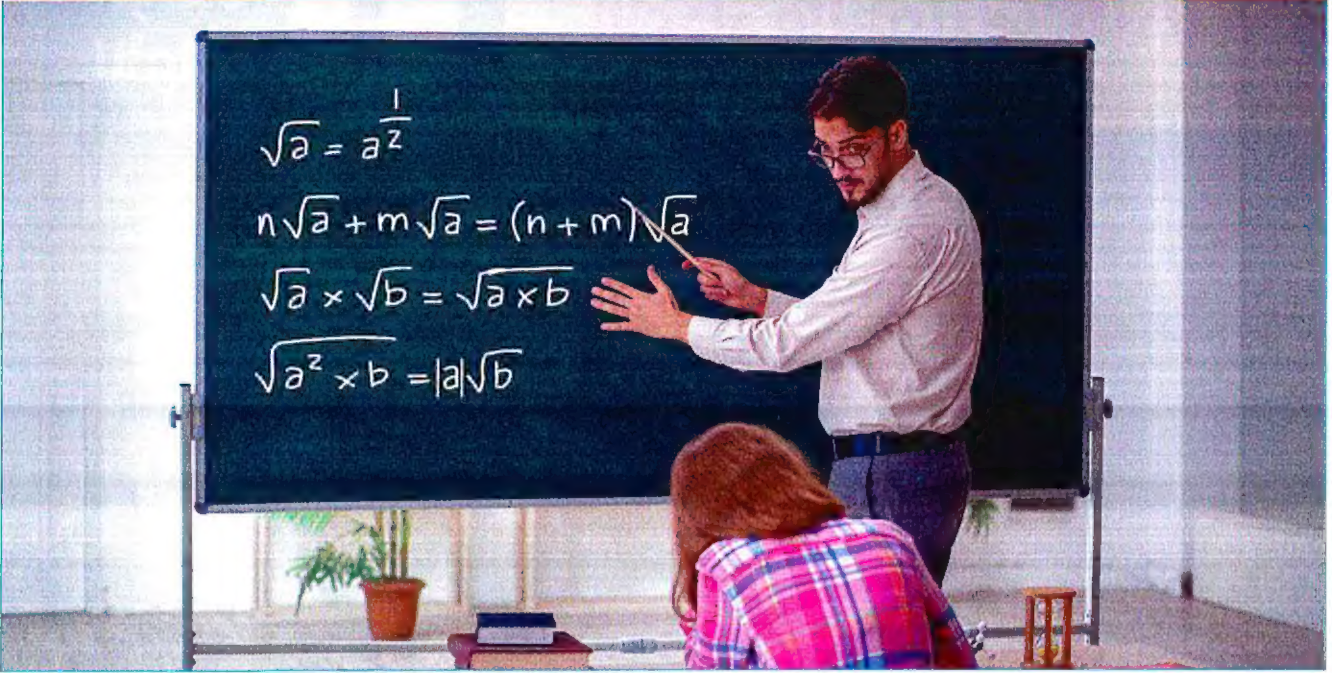
- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.
- التنمية المستدامة.
- التواصل الرياضى.

القيم:

- احترام الآخر.
- الوعى البيئى.
- المسئولية.
- الوعى بالأمن الغذائى.

ذاكر | الدرس 1

الأعداد الحقيقية (Real Numbers)





نواتج التعلم



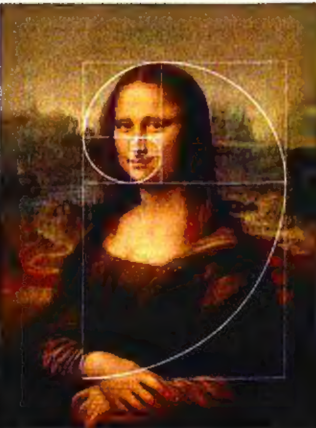
- يتعرف الطالب على مفهوم العدد غير النسبى.
- يقدر الطالب قيمة تقريبية للعدد غير النسبى ويمثلها على خط الأعداد.
- يتعرف الطالب على مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يرتب الطالب مجموعة من الأعداد الحقيقية تنازليًا أو تصاعديًا.
- يحل الطالب معادلات فى مجموعة الأعداد الحقيقية.

مفردات أساسية

- العدد غير النسبى (**Irrational Number**)
- الأعداد الحقيقية (**Real Numbers**)



فكر وناقش



- المستطيل الذهبى هو المستطيل الذى نسبة طوله إلى عرضه تساوى $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
وهذه النسبة تسمى النسبة الذهبية، ويرمز لها بالرمز φ، وقد استخدم بعض الفنانين المستطيل الذهبى فى أعمالهم الفنية، ومن بينهم ليوناردو دافنشى فى لوحة الموناليزا؛ لما توفره من حس جمالى وراحة للعين.

لماذا لا تعتبر النسبة الذهبية عددًا نسبيًا؟

- وفى هذا الدرس سوف نتعرف على مجموعتين جديدتين من الأعداد، ويسميان: مجموعة الأعداد غير النسبية، ومجموعة الأعداد الحقيقية، مما سيمكنك من الإجابة على مثل هذه الأسئلة.

تعلم 1 الأعداد غير النسبية

- العدد غير النسبى هو العدد الذى لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان ، $b \neq 0$ ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز Q'

تذكر أن

العدد النسبى: هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان $b \neq 0$ ويرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز Q

امثلة للاعداد غير النسبية:

1 الجذور التربيعية للأعداد التى ليست مربعات كاملة مثل: $\sqrt{3}$

حيث: $\sqrt{3} \approx 1.732050808$ ....

2 الجذور التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة مثل: $\sqrt[3]{-16}$

حيث: $\sqrt[3]{-16} \approx -2.5198421$ ....



امثلة اخرى للاعداد غير النسبية:

1 العدد π

حيث: $\pi \approx 3.14592654$ .... وهى النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

2 النسبة الذهبية φ

حيث: $\varphi \approx 1.618033989$ ....

3 0.91911911191111 .... , $3\sqrt{7}$, $4+\sqrt[3]{2}$, $\frac{6}{\sqrt{5}+3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

لاحظ أن

الأعداد غير النسبية لا توجد لها قيمة مضبوطة والآلة الحاسبة تعطى قيمًا تقريبية لها، وهى عبارة عن كسر عشرى غير منته و غير دائر ، لذلك لا يمكن كتابته على صورة عدد نسبى.

مثال 1

أى من الأعداد التالية عدد نسبى؟ وأيها عدد غير نسبى؟ مع ذكر السبب.

1 $\sqrt{8}$ 　 2 17 　 3 $1\frac{1}{2}$

4 $-\sqrt{4}$ 　 5 0.3 　 6 $0.\overline{2}$

7 $\sqrt[3]{25}$ 　 8 $\sqrt[3]{|-64|}$ 　 9 $0.\overline{714285}$



الحل

كل من الأعداد التالية هو عدد نسبى:

- 17 ، $1\frac{1}{2}$ ، $-\sqrt{4}$ ، 0.3 ، $0.\overline{2}$ ، $\sqrt[3]{|-64|}$ ، $0.\overline{714285}$

لأنه يمكن كتابة كل منها على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان، $b \neq 0$ كالتالى:

- $17 = \frac{17}{1}$ ، $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ، $-\sqrt{4} = \frac{-2}{1}$ ، $0.3 = \frac{3}{10}$
- $0.\overline{2} = \frac{2}{9}$ ، $\sqrt[3]{|-64|} = \sqrt[3]{64} = \frac{4}{1}$ ، $0.\overline{714285} = \frac{5}{7}$

تذكر أن

العدد $0.\overline{2}$ هو عدد عشرى غير منته ودائر وهو عدد نسبى

$0.\overline{2} = 0.22222 ..... = \frac{2}{9}$

- كل من العددين $\sqrt{8}$ ، $\sqrt[3]{25}$ هو عدد غير نسبى؛ لأن العدد 8 ليس مربعًا كاملًا، والعدد 25 ليس مكعبًا كاملًا.

وبالتالى لا يمكن كتابة أى منهما على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان ، $b \neq 0$

تعلم 2 إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبى:

- أى عدد غير نسبى يقع بين عددين نسبيين ويمكن تمثيله على خط الأعداد بنقطة تقع بين هذين العددين.

فمثلًا $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى يقع بين العددين 1, 2 حيث $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ فإن $1 < \sqrt{2} < 2$

مثال 2 أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل من العددين الآتيين وعين موقعه التقريبى على خط الأعداد.

1 $\sqrt{17}$ 2 $\sqrt[3]{25}$

الحل

1 اختر عددين صحيحين متتاليين كل منهما مربع كامل يقع بينهما العدد 17 (العدد 17 يقع بين العددين 16 ، 25)

$\because 16 < 17 < 25$ $\therefore \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ $\therefore 4 < \sqrt{17} < 5$

$\therefore$ العدد $\sqrt{17}$ يقع بين العددين 4 ، 5

وحيث إن العدد 17 أقرب إلى العدد 16 منه إلى العدد 25

فإن العدد $\sqrt{17}$ أقرب إلى العدد 4



2 اختر عددين صحيحين متتاليين كل منهما مكعب كامل يقع بينهما العدد 25

العدد 25 يقع بين العددين 8 ، 27

$\because 8 < 25 < 27$ $\therefore \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27}$ $\therefore 2 < \sqrt[3]{25} < 3$

$\therefore$ العدد $\sqrt[3]{25}$ يقع بين العددين 2 ، 3

وحيث إن العدد 25 أقرب إلى العدد 27 منه إلى العدد 8

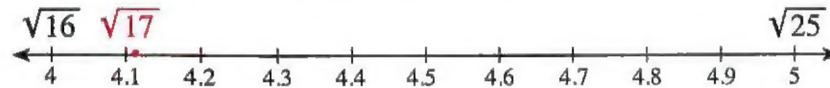
فإن العدد $\sqrt[3]{25}$ أقرب إلى العدد 3



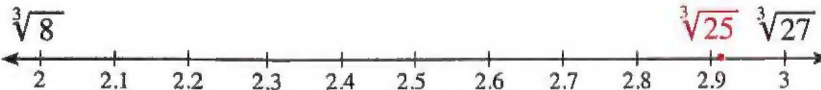
لاحظ أن

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية أفضل لعدد غير نسبى لأقرب عدد عشرى، فمثلًا:

$\sqrt{17} \approx 4.1$



$\sqrt[3]{25} \approx 2.9$



س سؤال 1

1 بين أى الأعداد التالية نسبى وأيها غير نسبى:

(أ) $\sqrt{16}$ (ب) $\sqrt{3} + 2$ (جـ) $\sqrt[3]{15}$ (د) $-7 - \sqrt{25}$ (هـ) $0.0\overline{8}$

2 أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من الأعداد الآتية وعين موقعه التقريبى على خط الأعداد:

(أ) $\sqrt{7}$ (ب) $\sqrt[3]{19}$

مثـال 3

غرفة مربعة الشكل، مساحة أرضيتها 15م^2، يريد أحمد أن يحيط أرضيتها بشريط زخرف. قدر طول هذا الشريط.

الحل

∵ مساحة المربع = 15 م^2 ∴ طول ضلع الغرفة المربعة = $\sqrt{15}$ م

∵ العدد 15 يقع بين عددين صحيحين متتاليين وكل منهما مربع كامل وهما 9 ، 16

$\therefore 9 < 15 < 16$ $\therefore \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$ $\therefore 3 < \sqrt{15} < 4$

∵ العدد 15 أقرب إلى العدد 16 منه إلى العدد 9

$\therefore \sqrt{15} \approx 4$ ∴ محيط الغرفة المربعة $\simeq 4 \times 4 \approx 16$م

∴ محيط الغرفة المربعة (طول الشريط) ≈ 16م

تذكر أن

مساحة المربع (A) = S^2

طول ضلع المربع (S) = $\sqrt{A}$

محيط المربع (P) = 4S

تعلم 3 الأعداد الحقيقية

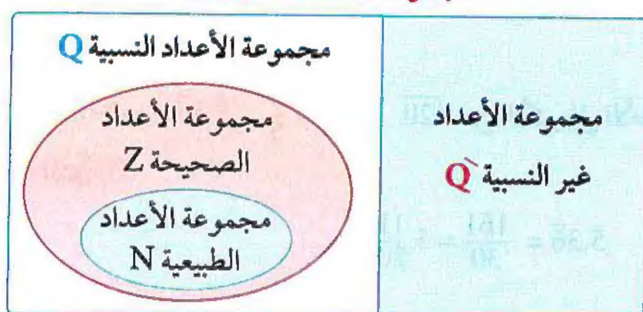
- مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة التى تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية Q ومجموعة الأعداد غير النسبية $Q^`$ ويرمز لها بالرمز R

أى أن $R = Q \cup Q^`$ حيث $Q \cap Q^` = \varnothing$

شكل ڤن المقابل يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد حيث:

$N \subset Z \subset Q \subset R$

$Q^` \subset R$



مثـال 4

ضع فى المربع الخالى رمزًا مناسبًا من الرمزين ∈ أو ∉

1 $Q^`$ ☐ $0.\overline{15}$ 2 R ☐ $\sqrt{10}$ 3 Q ☐ $\sqrt{3.24}$

4 Z ☐ $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ 5 N ☐ $\sqrt[3]{9}$ 6 R ☐ $\sqrt{\left|-\frac{1}{4}\right|}$

الحل

1 $Q^`$ ∉ $0.\overline{15}$ 2 R ∈ $\sqrt{10}$ 3 Q ∈ $\sqrt{3.24}$

4 Z ∉ $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ 5 N ∉ $\sqrt[3]{9}$ 6 R ∈ $\sqrt{\left|-\frac{1}{4}\right|}$

مثـال 5

ما أقل قيمة صحيحة للمتغير n تجعل كلًا من العددين $\sqrt{41+n}$ ، $\sqrt{2n+20}$ عددًا نسبيًا؟

الحل

أقل قيمة صحيحة للمتغير n التى تجعل كلًا من 41 + n ، 2n + 20 عددًا مربعًا كاملًا هى العدد 8

وعندئذ يكون:

$\sqrt{41+n} = \sqrt{41+8} = \sqrt{49} = 7 \in Q$

$\sqrt{2n+20} = \sqrt{2(8)+20} = \sqrt{36} = 6 \in Q$

مثال 6

ضع فى كل مربع أحد الرموز < أو > أو = لتكون العبارة صحيحة.

1. $2 \; \square \; \sqrt{5}$
2. $2.6 \; \square \; \sqrt{7}$
3. $-2 \; \square \; \sqrt[3]{-24}$
4. $\sqrt{3} \; \square \; 1+\sqrt{2}$
5. $\sqrt{4} \; \square \; \sqrt[3]{8}$
6. $\sqrt[3]{-1} \; \square \; 3-\sqrt{5}$

الحل

1. باستخدام الآلة الحاسبة
$\sqrt{5} \approx 2.24$
$\sqrt{5} \; \boxed{>} \; 2$

2. باستخدام الآلة الحاسبة
$\sqrt{7} \approx 2.65$
$\sqrt{7} \; \boxed{>} \; 2.6$

3. باستخدام الآلة الحاسبة
$\sqrt[3]{-24} \approx -2.88$
$\sqrt[3]{-24} \; \boxed{<} \; -2$

4. باستخدام الآلة الحاسبة
$1+\sqrt{2} \approx 2.414$
$\sqrt{3} \approx 1.7320$
$1+\sqrt{2} \; \boxed{>} \; \sqrt{3}$

5. $\because \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{4} = 2$
$\therefore \sqrt[3]{8} \; \boxed{=} \; \sqrt{4}$

6. باستخدام الآلة الحاسبة
$3-\sqrt{5} \approx 0.764$
$\sqrt[3]{-1} = -1$
$3-\sqrt{5} \; \boxed{>} \; \sqrt[3]{-1}$

مثال 7

رتب الأعداد $5.3\overline{6}$ ، $4\frac{3}{5}$ ، 6 ، $\sqrt{20}$ من الأكبر إلى الأصغر (تنازليًا):

الحل

$5.3\overline{6} = \frac{161}{30} = 5\frac{11}{30}$ ، $4\frac{3}{5} = 4.6$ ، $\because \sqrt{20} \approx 4.472$

$\because 6 > 5\frac{11}{30} > 4.6 > 4.472$

$\therefore$ الترتيب من الأكبر إلى الأصغر : $6 > 5.3\overline{6} > 4\frac{3}{5} > \sqrt{20}$

مثال 8

رتب الأعداد $\sqrt{62}$ ، 8 ، $-\sqrt{50}$ ، $\sqrt{70}$ من الأصغر إلى الأكبر (تصاعديًا):

الحل

$\because \sqrt{62} \approx 7.874$ $\quad \because -\sqrt{50} \approx -7.071$ $\quad \because \sqrt{70} \approx 8.367$

$\because -7.071 < 7.874 < 8 < 8.367$

$\therefore$ الترتيب من الأصغر إلى الأكبر : $-\sqrt{50} < \sqrt{62} < 8 < \sqrt{70}$

س سؤال 2

1. ضع فى كل مربع أحد الرموز < أو > أو = لتكون العبارة صحيحة.
(أ) $3 \; \square \; \sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{16} \; \square \; \sqrt[3]{64}$ (جـ) $\sqrt[3]{8} \; \square \; -\sqrt{9}$

2. رتب الأعداد: $2.\overline{2}$ ، $3\frac{1}{3}$ ، 5 ، $\sqrt{30}$ من الأصغر إلى الأكبر.

تعلم 4 حل المعادلات:

مثال 9 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية إذا كانت مجموعة التعويض هى : أولاً: $Q^{`}$ ثانيًا: R

1 $\frac{1}{3}x^3 + 9 = 0$

2 $\frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{2}$

3 $2(x^2 - 1) = -10$

4 $6x^2 - 3 = 4x^2 + 7$

الحل

1

$\because \frac{1}{3}x^3 + 9 = 0$

$\therefore \frac{1}{3}x^3 = -9$

$\therefore x^3 = -9 \times 3 = -27$

$\therefore x = \sqrt[3]{-27} = -3$

$\therefore$ مجموعة الحل فى $Q^{`}$ هى $\varnothing$ لأن $-3 \notin Q^{`}$

$\therefore$ مجموعة الحل فى R هى $\{-3\}$ لأن $-3 \in R$

2

$\because \frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{2}$

$\therefore x^2 = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 6$

$\therefore x = \pm\sqrt{6}$

$\therefore$ مجموعة الحل فى $Q^{`}$ هى $\{\sqrt{6} ، -\sqrt{6}\}$

لأن: $\pm\sqrt{6} \in Q^{`}$

$\therefore$ مجموعة الحل فى R هى $\{\sqrt{6} ، -\sqrt{6}\}$

لأن: $\pm\sqrt{6} \in R$

3

$\because 2(x^2 - 1) = -10$

$\therefore x^2 - 1 = \frac{-10}{2} = -5$

$\therefore x^2 = -5 + 1 = -4$

$\therefore x = \pm\sqrt{-4} \notin R$

$\therefore$ مجموعة الحل فى $Q^{`}$ هى $\varnothing$ لأن: $\pm\sqrt{-4} \notin Q^{`}$

$\therefore$ مجموعة الحل فى R هى $\varnothing$ لأن: $\pm\sqrt{-4} \notin R$

4

$\because 6x^2 - 3 = 4x^2 + 7$

$\therefore 6x^2 - 4x^2 = 7 + 3$

$\therefore 2x^2 = 10$

$\therefore x^2 = 5$ $\qquad \therefore x = \pm\sqrt{5}$

$\therefore$ مجموعة الحل فى $Q^{`}$: $\{\sqrt{5} ، -\sqrt{5}\} = Q^{`}$

لأن: $\pm\sqrt{5} \in Q^{`}$

$\therefore$ مجموعة الحل فى R: $\{\sqrt{5} ، -\sqrt{5}\} = R$

لأن: $\pm\sqrt{5} \in R$

سؤال 3

1 ضع فى المربع الخالى رمزًا مناسبًا من الرمزين $\in$ أو $\notin$:

(أ) $Q^{`}$ ☐ $0.\dot{7}$

(ب) Q ☐ $(7 - \sqrt{16})$

(جـ) N ☐ $\sqrt[3]{13}$

(د) Z ☐ $\frac{0}{5}$

2 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $x^3 - 7 = 1$

(ب) $4x^2 - 5 = 2x^2 + 13$

(جـ) $\frac{1}{2}x^2 = 5$

(د) $3x^3 + 2 = 26$

فى الحالات الآتية: إذا كانت مجموعة التعويض هى : أولاً: $Q^{`}$ ثانيًا: Z

▶ أسئلة الكتاب المدرسى

الأعداد غير النسبية:

1 أى من الأعداد التالية عدد نسبى، وأيها عدد غير نسبى؟

1 17 ....
2 $1\frac{1}{2}$ ....
3 $-\sqrt{4}$ ....
4 $\sqrt{8}$ ....
5 0.3 ....
6 0 ....
7 25% ....
8 $\sqrt[3]{-49}$ ....
9 $0.\dot{2}$ ....
10 $\frac{22}{7}$ ....
11 $\sqrt[3]{\frac{25}{36}}$ ....
12 $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ ....
13 $\sqrt{0.36}$ ....
14 العدد π ....
15 $\sqrt{5}+1$ ....
16 النسبة الذهبية φ ....

2 اختر الإجابة الصحيحة:

1 جميع الأعداد التالية أعداد نسبية ما عدا ....

(أ) 5 (ب) $\sqrt{4}$ (جـ) -7 (د) $\sqrt{7}$

2 أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى؟ ....

(أ) $0.\overline{3}$ (ب) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ (جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt[3]{-125}$

إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبى:

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى يقع بين 4 ، 3 ؟ ....

(أ) $3\frac{1}{4}$ (ب) $\sqrt{12.25}$ (جـ) $\sqrt{11}$ (د) $3.\overline{1}$

2 أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى يقع بين 3 ، 2 ؟ ....

(أ) $2.\overline{5}$ (ب) $2\frac{1}{3}$ (جـ) $\sqrt{6.25}$ (د) $\sqrt[3]{9}$

3 العدد غير النسبى المحصور بين -2 ، -1 هو ....

(أ) -3 (ب) $-1\frac{1}{2}$ (جـ) $-\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{2}$

4 إذا كان: $x \in Z$ ، $x < \sqrt{29} < x+1$ فما قيمة x ؟ ....

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

5 إذا كان: $a < \sqrt{3} < b$ فإن: $(a\ ,\ b) =$ ....

(أ) $(2\ ,4)$ (ب) $(2\ ,3)$ (جـ) $(1\ ,2)$ (د) $(4\ ,5)$

6 إذا كان: $1 < \sqrt{n} < 2$ فأى مما يلى قيمة محتملة للعدد n ؟ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 8

7 العددان الصحيحان المتتاليان اللذان ينحصر بينهما العدد $\sqrt{17}$ هما .... ، ....

(أ) 16 ، 18 (ب) 6 ، 7 (جـ) 5 ، 6 (د) 4 ، 5

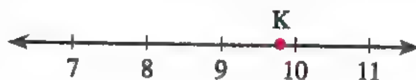
8 ما تقدير العدد $\sqrt{41}$ لأقرب عدد صحيح؟ ....

(أ) 6 (ب) 7 (جـ) 36 (د) 49

9 ما تقدير العدد $\sqrt[3]{25}$ لأقرب عدد صحيح؟ ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 12.5

10 أى من الأعداد التالية تمثله النقطة K على خط الأعداد التالى؟ ....



(أ) $\sqrt{86}$ (ب) $\sqrt{96}$ (جـ) $\sqrt{81}$ (د) $\sqrt{78}$

11 إذا كان x ، y عددين صحيحين متتاليين، فما قيمة $x + y$ ؟ ....



(أ) 11 (ب) 13 (جـ) 15 (د) 17

4 ضع فى كل مربع أحد الرموز (< أو > أو =) لتكون العبارة صحيحة:

1 $\sqrt{7}$ ☐ 3 2 $\sqrt[3]{9}$ ☐ $\sqrt{4}$ 3 $\sqrt[3]{25}$ ☐ $\sqrt{9}$

4 -3 ☐ $-\sqrt{10}$ 5 $\sqrt{13}$ ☐ 3.5 6 -2.6 ☐ $-\sqrt{7}$

7 4 ☐ $\sqrt{5}+1$

5 1 رتب الأعداد: $6.3\overline{6}$ ، $6\frac{4}{5}$ ، 7 ، $\sqrt{40}$ من الأصغر للأكبر.

.... ، .... ، .... ، ....

2 رتب الأعداد: $-3\frac{2}{5}$ ، $-\sqrt[3]{30}$ ، -3.7 ، $-\sqrt{13}$ من الأكبر للأصغر.

.... ، .... ، .... ، ....

6 إذا كان n عددًا صحيحًا فأوجد قيمة n فى كل من الحالات الآتية:

1 $n < \sqrt{2} < n+1$ 2 $n < \sqrt{119} < n+1$ 3 $n < \sqrt[3]{6} < n+1$

4 $n < \sqrt[3]{|-35|} < n+1$ 5 $n < \sqrt[3]{-70} < n+1$

7 أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من الأعداد الآتية، وعين موقعه التقريبى على خط الأعداد:

1 $\sqrt{5}$ 2 $\sqrt{13}$ 3 $-\sqrt{11}$ 4 $\sqrt[3]{14}$ 5 $\sqrt[3]{-5}$

8 قام كل من حمزة وآسر بالإجابة عن السؤال التالى:

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما العدد غير النسبى $-\sqrt{5}$

حل حمزة	حل آسر
$4 < 5 < 9$	$-9 < -5 < -4$
$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$	$-\sqrt{9} < -\sqrt{5} < -\sqrt{4}$
$2 < \sqrt{5} < 3$	$-3 < -\sqrt{5} < -2$
$-3 < -\sqrt{5} < -2$	

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل؟

9 حديقة مربعة الشكل مساحتها 403 $م^2$، يريد حسين أن يحيطها بسياج، قدِّر طول ضلع هذا السياج.

الأعداد الحقيقية:

10 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $Q \cup \grave{Q} = ...$

(أ) N (ب) Z (جـ) $\varnothing$ (د) R

2 $Q \cap \grave{Q} = ...$

(أ) R (ب) Q (جـ) $\varnothing$ (د) Z

3 R .... $\grave{Q}$

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

4 R .... Q

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

11 ضع فى المربع الخالى رمزًا مناسبًا من الرمزين ($\in$ أو $\notin$):

1 Z ☐ -3 2 N ☐ $|-8|$ 3 Q ☐ $0.\dot{3}$ 4 $\grave{Q}$ ☐ $0.5\dot{2}$

5 R ☐ $\sqrt{7}$ 6 Z ☐ $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ 7 Q ☐ $3\sqrt{5}$ 8 R ☐ $\sqrt{-1}$

12 اكتب جميع المجموعات الممكنة من مجموعات الأعداد (R ، $\grave{Q}$ ، Q ، Z ، N) التى ينتمى إليها كل من الأعداد الآتية:

1 $\sqrt{7}$ 2 $\sqrt{49}$ 3 $0.\dot{3}\dot{1}$ 4 $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$

حل المعادلات:

13 أوجد فى R مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

1 $x^2 + 1 = 17$ 2 $x^3 - 3 = -30$ 3 $x^3 - 11 = 5$

4 $2x^3 + 13 = 67$ 5 $\frac{2}{3}x^2 = \frac{4}{15}$ 6 $3x^2 - 1 = -13$

14 أوجد فى $\grave{Q}$ مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

1 $2x^2 - 3 = 9$ 2 $6x^2 - 3 = 4x^2 + 7$

3 $2(x^3 + 1) = 18$ 4 $3x^3 - 2(3x^3 - 1) = 83$

15 مربع مساحته 29 سم²، إلى أى مجموعات الأعداد الآتية ينتمى طول ضلعه؟ حدد كل المجموعات الممكنة:

1 R 2 Q 3 $\grave{Q}$ 4 Z 5 N

16 شكلت سمر قطعة من الصلصال على شكل مكعب مساحته الكلية 300 سم²، أوجد طول حرفه، هل طول الحرف عدد نسبى ؟

17 أيهما أكبر: طول ضلع مربع مساحته 16 سم²، أم طول قطر مربع مساحته 9 سم²؟

18 حديقة مستطيلة الشكل مساحتها 80 م²، طولها ضعف عرضها.

أوجد: كلًّا من الطول والعرض لأقرب متر.

19 حديقة مستطيلة الشكل مساحتها 150 م²،طولها ثلاثة أمثال عرضها. أوجد: كلًّا من الطول والعرض لأقرب متر.

20 ما أقل قيمة صحيحة للمتغير n تجعل كلًّا من العددين:

$\sqrt{33 + n}$ و $\sqrt[3]{5n - 7}$ عددًا نسبيًّا؟

21 ما أقل قيمة صحيحة للمتغير n تجعل كلًّا من العددين:

$\sqrt{2n + 5}$ و $\sqrt[3]{6n+15}$ عددًا نسبيًّا؟



22 أوجد عددًا غير نسبى يقع بين العددين $0.\overline{3}$ ، $0.\overline{6}$

23 إذا كان: $11 > \sqrt{x} > 10$ ، $13 > \sqrt{y} > 12$ حيث x ، y عددان صحيحان موجبان.

فأوجد أكبر قيمة للمقدار $y - x$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $\sqrt[3]{4} \in$ ....

(أ) N (ب) Z (جـ) $\grave{Q}$ (د) Q

2 R .... Z

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

3 المربع الذى مساحته 10 سم^2، فإن طول ضلعه = ... سم.

(أ) 5 (ب) 100 (جـ) $\sqrt{10}$ (د) 10

4 $\sqrt[3]{0.008} \in$ ....

(أ) N (ب) Q (جـ) $\grave{Q}$ (د) Z

5 جميع الأعداد التالية نسبية ما عدا ....

(أ) 7 (ب) $\sqrt{16}$ (جـ) -11.3 (د) $\sqrt{15}$

6 إذا كان: $x \in Z$، $x < \sqrt[3]{50} < x+1$ فما قيمة x؟ ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 5

7 $\sqrt[3]{100}$ .... $\sqrt{25}$

(أ) = (ب) < (جـ) > (د) $\leqslant$

8 ما تقدير العدد $\sqrt{30}$ لأقرب عدد صحيح؟ ....

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

2 أجب عما يأتى:

1 أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من الأعداد الآتية، وعين موقعه التقريبى على خط الأعداد:

(أ) $\sqrt{7}$ (ب) $\sqrt[3]{5}$

2 اكتب جميع المجموعات الممكنة من مجموعات الأعداد (N ، Z ، Q ، $\grave{Q}$ ، R) التى ينتمى إليها كل من الأعداد الآتية:

(أ) $\sqrt[3]{1000}$ (ب) $\sqrt{15}$ (جـ) $1.2\dot{4}$

3 أوجد فى $\grave{Q}$ مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية: (أ) $3x^2 - 2 = 7$ (ب) $7x^3 - 1 = 5x^3 + 15$

4 أوجد فى R مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية: (أ) $\frac{1}{2}x^3 - 3 = 2$ (ب) $2(x^2 - 1) = x^2 - 7$

ذاكر

الدرس 2

الفترات والعمليات عليها
(Intervals and Their Operations)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب مفهوم الفترة كمجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يُمثل الطالب فترة على خط الأعداد.
- يجرى الطالب عمليات على التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة على الفترات.
- يوظف الطالب مفهوم الفترات فى حل مشكلات حياتية.



مفردات أساسية

- فترة (Interval)
- فترة محدودة (Bounded interval)
- تقاطع (Intersection)
- مكملة (Complement)
- ما لا نهاية (Infinity)
- فترة مغلقة (closed interval)
- فترة غير محدودة (Unbounded interval)
- اتحاد (Union)
- المجموعة الشاملة (Universal Set)
- فترة مفتوحة (open interval)



فكر وناقش

- يريد أحمد المشى كل يوم من أجل تحسين لياقته، فقرر ألا يقل عدد الكيلومترات التى يمشيها يوميًا عن 3 كيلومترات، وألا يزيد عن 6 كيلومترات.

هل تستطيع أن تكتب بطريقة ما مجموعة الأعداد جميعها التى تعبر عن القيم التى يمكن لأحمد أن يقطعها يوميًا؟

- فى هذا الدرس، سوف نتعلم مفهوم الفترة وأنواع الفترات والعمليات عليها، مما سيمكننا من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



تعلم 1 الفترات وأنواعها:

- لا يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية والمجموعات الجزئية منها بطريقة السرد لأنه لا يمكن كتابة كل عناصرها، ولذلك نستخدم طريقة أخرى للتعبير عنها وهى الفترات.

الفترة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، وعند كتابة الفترة نبدأ بالعدد الأصغر وننتهى بالعدد الأكبر.

- وتنقسم الفترات إلى: فترات محدودة وفترات غير محدودة.

أولاً الفترات المحدودة:

إذا كان a و b عددين حقيقيين ، $a < b$ فإن:

الفترة	التعبير الرياضى	التعبير بالصفة المميزة	التمثيل على خط الأعداد
الفترة المغلقة: $[a , b]$ وتعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a وأقل من أو تساوى b	$[a , b]$ لاحظ أن: $a \in [a , b]$ $b \in [a , b]$	$\{x : x \in R , a \leqslant x \leqslant b\}$	a ● ———— ● b ● الدائرة مظللة تعنى أن: العدد ينتمى للفترة
الفترة المفتوحة: $]a , b[$ وتعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأقل من b	$]a , b[$ لاحظ أن: $a \notin]a , b[$ $b \notin]a , b[$	$\{x : x \in R , a < x < b\}$	a ○ ———— ○ b ○ الدائرة مفتوحة (غير مظللة) تعنى أن: العدد لا ينتمى للفترة
الفترة نصف مفتوحة أو الفترة نصف مغلقة: $[a , b[$ وتعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a وأقل من b	$[a , b[$ لاحظ أن: $a \in [a , b[$ $b \notin [a , b[$	$\{x : x \in R , a \leqslant x < b\}$	a ● ———— ○ b
الفترة نصف مفتوحة أو الفترة نصف مغلقة: $]a , b]$ وتعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأقل من أو تساوى b	$]a , b]$ لاحظ أن: $a \notin]a , b]$ $b \in]a , b]$	$\{x : x \in R , a < x \leqslant b\}$	a ○ ———— ● b

لاحظ أن

أى عددين حقيقيين ينحصر بينهما عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية.

مثال 1 اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّل كلًّا منها على خط الأعداد:

1 $A=\{x: x\in R, -1<x<5\}$

2 $B=\{x: x\in R, 3\leqslant x\leqslant 6\}$ ، هل $\sqrt{6}\in B$ ؟

3 المجموعة C هى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -4 وأقل من أو تساوى $\sqrt{4}$ ، هل $\sqrt[3]{-4}\in C$ ؟

الحل

1 $A=]-1,5[$



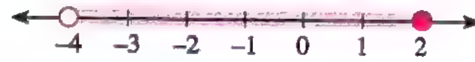
2 $B=[3,6]$



باستخدام الآلة الحاسبة: $\sqrt{6}\approx 2.45$

$\therefore \sqrt{6}<3$ $\qquad \therefore \sqrt{6}\notin B$

3 $C=]-4,2]$



$\sqrt{4}=2$

باستخدام الآلة الحاسبة: $\sqrt[3]{-4}\approx -1.59$

$\therefore -4<\sqrt[3]{-4}\leqslant 2$ $\qquad \therefore \sqrt[3]{-4}\in]-4,2]$

مثال 2 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أى من الفترات الآتية تعبر عن فترة مغلقة؟ .... $([-1,1[$ ، $]-1,1]$ ، $[-1,1]$ ، $]-1,1[)$

2 الفترة الممثلة على خط الأعداد المقابل (2 ، 5) هى .... $([2,5[$ ، $]2,5]$ ، $]2,5[$ ، $[2,5])$

3 إذا كانت $a\in]-2,2[$ فإن a يمكن أن تساوى أيًّا مما يأتى؟ .... $(\sqrt{2}$ ، 2.5 ، -2 ، $2)$

4 $[-7,7[$ .... $|-7|$ $\qquad (\not\subset$ ، $\subset$ ، $\notin$ ، $\in)$

الحل

1 $[-1,1]$ $\qquad$ 2 $]2,5]$ $\qquad$ 3 $\sqrt{2}$ $\qquad$ 4 $\notin$ $\quad |-7|=7$

سؤال 1

1 اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّل كلًّا منها على خط الأعداد:

(أ) $X=\{x: x\in R, 5\leqslant x\leqslant 6\}$

(ب) Y تساوى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى $-\sqrt{9}$ وأقل من 0 ، هل $\sqrt[3]{-9}\in Y$ ؟

2 اختر الإجابة الصحيحة:

(أ) أى من الفترات الآتية تعبر عن فترة مفتوحة؟ $([-2,4]$ ، $]-2,4]$ ، $[-2,4[$ ، $]-2,4[)$

(ب) إذا كانت $a\notin[0,1]$ فإن a يمكن أن تساوى أيًّا مما يأتى؟ $(-1$ ، 0.5 ، 1 ، $0)$

(جـ) أى من الفترات الآتية ينتمى إليها $\sqrt{8}$؟ $([2,3]$ ، $[3,4]$ ، $[0,1]$ ، $[-1,2])$

ثانيًا الفترات غير المحدودة:

- تمتد مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد فى الاتجاه الموجب إلى ما لا نهاية (∞) وتمتد فى الاتجاه السالب إلى سالب ما لا نهاية ($-\infty$)
- يستخدم الرمزان ∞ و $-\infty$ فى التعبير عن المجموعات غير المحدودة وهما رمزان يعبران عن عدم معرفتنا بأكبر، وأصغر عدد.

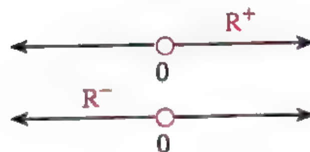
إذا كان $a \in R$ فإن:

	التعبير بالصفة المميزة	التمثيل على خط الأعداد
$[a , \infty[$ تعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a	$\{x : x \in R , x \geqslant a\}$	 ● الدائرة مظللة تعنى أن: العدد a ينتمى إلى الفترة
$]-\infty , a]$ تعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو تساوى a	$\{x : x \in R , x \leqslant a\}$	
$]a , \infty[$ تعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a	$\{x : x \in R , x > a\}$	 ○ الدائرة مفتوحة (غير مظللة) تعنى أن: العدد a لا ينتمى إلى الفترة
$]-\infty , a[$ تعنى مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من a	$\{x : x \in R , x < a\}$	

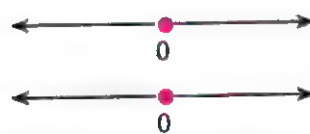
نقاط هامة

- الفترة $]-\infty , \infty[$ تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث $\infty \notin R$ ، $-\infty \notin R$ أى أن: $R =]-\infty , \infty[$
- $R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$

حيث: R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة = $]0 , \infty[$
R^- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة = $]-\infty , 0[$



- $R^+ \cup R^- = R - \{0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = $R^+ \cup \{0\} = [0 , \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = $R^- \cup \{0\} =]-\infty , 0]$



مثال 8

اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية ومثلها على خط الأعداد:

1. $\{x : x \in R , x \geqslant 4\}$
2. $\{x : x \in R , x \leqslant -2\}$
3. $\{x : x \in R^+ , x < 3\}$
4. مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3

الحل

1. $[4 , \infty[$



2. $]-\infty , -2]$



3. $]0 , 3[$



4. $]-3 , \infty[$



تعلم 2 العمليات على الفترات:



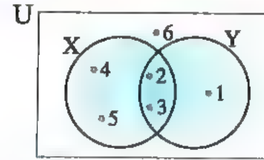
تذكر أن: المجموعات والعمليات عليها .

بفرض أن: $X=\{2,3,4,5\}$, $Y=\{1,2,3\}$, $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ حيث U ترمز للمجموعة الشاملة وهى المجموعة التى تكون جميع المجموعات المعطاة فى المسألة مجموعات جزئية منها.

فيكون :

1 الاتحاد $(X \cup Y)$:

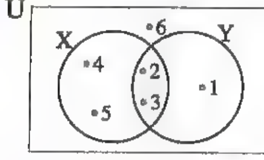
هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X أو Y



$\therefore X \cup Y=\{1,2,3,4,5\}$

2 التقاطع $(X \cap Y)$:

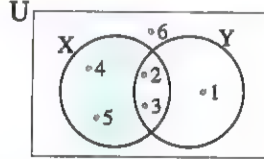
هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X و Y



$\therefore X \cap Y=\{2,3\}$

3 الفرق $(X-Y)$:

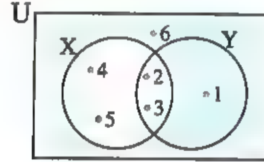
هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X ولا تنتمى إلى Y



$\therefore X-Y=\{4,5\}$

4 المكملة X' :

هى مجموعة العناصر التى تنتمى إلى U ولا تنتمى إلى X



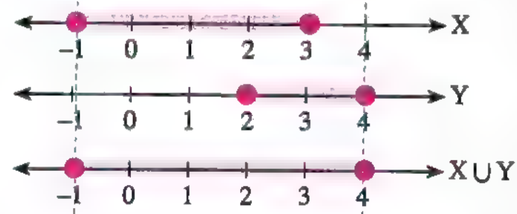
$\therefore X'=U-X=\{1,6\}$

• وحيث إن الفترات هى مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقيـة، ولذلك يمكن إجراء عمليات التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة عليها بنفس طريقة إجرائها على المجموعات.

بفرض أن: $X=[-1,3]$, $Y=[2,4]$, $U=R$ حيث U المجموعة الشاملة.

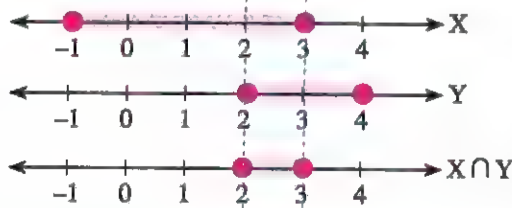
فيكون :

1 $X \cup Y=[-1,3] \cup [2,4]$



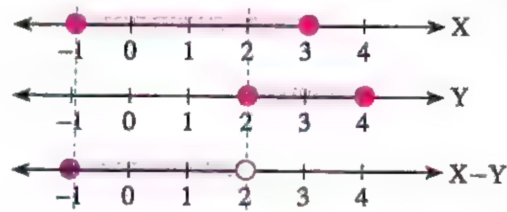
$\therefore X \cup Y=[-1,4]$

2 $X \cap Y=[-1,3] \cap [2,4]$



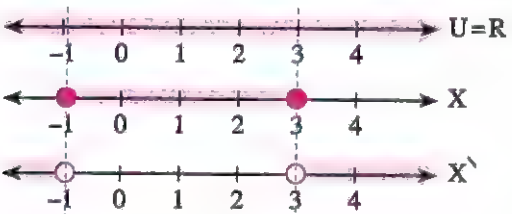
$\therefore X \cap Y=[2,3]$

3 $X-Y=[-1,3]-[2,4]$



$\therefore X-Y=[-1,2[$

4 $X'=R-X$



$\therefore X'=]-\infty,-1[\cup]3,\infty[=R-[-1,3]$

لاحظ أن

$X-Y \neq Y-X$

مثال 4 أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًّا مما يلي:

1 $[4,9] \cap [7,10[$

2 $]-3,2[\cup]0,\infty[$

3 $]-\infty,6] - [4,\infty[$

4 $[-5,\infty[`$

الحل

1





$[4,9] \cap [7,10[= [7,9]$

2





$]-3,2[\cup]0,\infty[=]-3,\infty[$

3

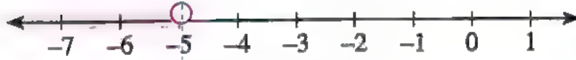




$]-\infty,6] - [4,\infty[=]-\infty,4[$

4





$[-5,\infty[` =]-\infty,-5[$

مثال 5 أوجد ناتج كل مما يأتي:

1 $N \cap [-2,3[$ 2 $\{1,2\} \cup]1,2[$ 3 $\{4,8\} \cap [4,8[$ 4 $[3,7] - \{3,7\}$

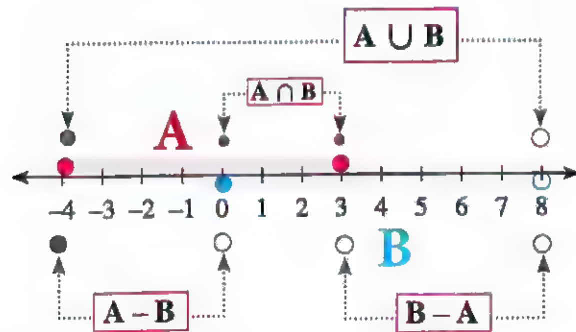
الحل

1 $\{0,1,2\}$ 2 $[1,2]$ 3 $\{4\}$ 4 $]3,7[$

مثال 6 إذا كانت: $A = [-4,3]$ ، $B = [0,8[$ فأوجد مستعينًا بخط الأعداد:

1 $A \cap B$ 2 $A \cup B$ 3 $A - B$ 4 A' 5 $B - A$ 6 B'

الحل



1 $A \cap B = [0,3]$

2 $A \cup B = [-4,8[$

3 $A - B = [-4,0[$

4 $A' =]-\infty,-4[\cup]3,\infty[$ أو $A' = R - [-4,3]$

5 $B - A =]3,8[$

6 $B' =]-\infty,0[\cup [8,\infty[$ أو $B' = R - [0,8[$

س؟ سؤال 2

1 اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية ومثلها على خط الأعداد:

(أ) $\{x : x \in R ,\ x < 1\}$ (ب) مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة الأكبر من -2

2 إذا كانت: $X = [-2,5]$ ، $Y =]0,7]$ فأوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًّا مما يلي:

(أ) $X \cap Y$ (ب) $Y \cup X$ (جـ) $X - Y$ (د) $Y - X$

3 أوجد ناتج كل مما يأتي:

(أ) $N \cap]-2,5[$ (ب) $Z^+ \cap [-1,1]$ (جـ) $[1,4] - \{1\}$ (د) $]-2,\infty[`$

أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً: الفترات المحدودة:

1 اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّلها على خط الأعداد:

1 $A = \{x : x \in R , 2 < x < 5\}$
2 $B = \{x : x \in R , -2 \leqslant x < 3\}$
3 $C = \{x : x \in R , 0 \leqslant x \leqslant 4\}$
4 $D = \{x : x \in R , -3 < x \leqslant -1\}$
5 $E = \{x : x \in R , -1.5 \leqslant x \leqslant \sqrt{16}\}$. هل $\sqrt[3]{-16} \in E$ ؟

2 عبر عن الموقفين الآتيين بمتباينة مناسبة، ثم اكتبها على صورة فترة ومثلها على خط الأعداد:

1 عمل: يُشترط أن لا يقل عُمرك عن 25 سنة ولا يزيد على 45 سنة لتلتحق بوظيفة ما.
2 جغرافيا: تتراوح درجات الحرارة فى إحدى مدن أمريكا الشمالية من $-4^{\circ}c$ إلى $20^{\circ}c$.

3 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 إذا كانت $a \in]2 , 5[$ فإن a يمكن أن تُساوى أيًا مما يلى؟ ....
(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 5

2 إذا كانت $a \notin]-1 , 3[$ فإن a يمكن أن تُساوى أيًا مما يلى؟ ....
(أ) -1 (ب) 0 (جـ) 2 (د) 3

3 إذا كانت $X = [-5 , 7[$ فأى ما يلى صحيح؟ ....
(أ) $7 \in X$ (ب) $-5 \notin X$ (جـ) $0 \notin X$ (د) $-2 \in X$

4 $\sqrt[3]{-125}$ .... $]-\sqrt{25} , \sqrt{25}]$
(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

5 إذا كانت $X = \{x : x \in R , 1 < x \leqslant 6\}$ فإن X .... $[2 , 5]$
(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

6 أىّ الفترات الآتية ينتمى إليها العدد $-\sqrt{7}$ ؟ ....
(أ) $[-2 , -1]$ (ب) $[-3 , -2]$ (جـ) $[-4 , -3]$ (د) $[-7 , -6]$

ثانيًا: الفترات غير المحدودة:

4 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 $R =$ ....
(أ) $Q \cap \grave{Q}$ (ب) $R^{+} \cup R^{-}$ (جـ) $]-\infty , \infty[$ (د) $R^{+} \cap R^{-}$

2 $R^{+} =$ ....
(أ) $]-\infty , 0[$ (ب) $]0 , \infty[$ (جـ) $[0 , \infty[$ (د) $]-\infty , 0]$

3 $R^- = ...$

(أ) $]-\infty, 0]$ (ب) $]-\infty, 0[$ (جـ) $[0, \infty[$ (د) $]0, \infty[$

4 مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة هي ......

(أ) $[0, \infty[$ (ب) $]-\infty, 0[$ (جـ) $]-\infty, 0]$ (د) $]0, \infty[$

5 إذا كان: $x \in [-7, \infty[$ فإن ... . . .

(أ) $x > -7$ (ب) $x \leqslant -7$ (جـ) $x \geqslant -7$ (د) $x < -7$

6 $[2, \infty[$ .... $\{3\}$

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

7 $]-\infty, 1[$ .... $\sqrt[3]{-1}$

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

8 R^+ .... 1.3×10^{-5}

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

5 اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّلها على خط الأعداد:

1 $A = \{x : x \in R, x \geqslant 2\}$ 2 $B = \{x : x \in R, x < 3\}$

3 $C = \{x : x \in R, x > -7\}$ 4 $D = \{x : x \in R, x \geqslant \sqrt[3]{-8}\}$

5 مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من $|-5|$

ثالثًا: العمليات على الفترات :

6 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 $\{5\} \cap]5, 7] = ...$

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{5\}$ (جـ) $[5, 7]$ (د) $\{7\}$

2 في الشكل المُقابل:



أي ما يلي يُمثل $X \cap Y$ ؟ ....

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{5\}$ (جـ) $[3, 7]$ (د) $[3, 5[$

3 ما الفترة الناتجة عن $]2, 5[\cup \{2\}$ ؟ ....

(أ) $]2, 5[$ (ب) $[2, 5]$ (جـ) $]2, 5]$ (د) $[2, 5[$

4 إذا كانت: $X =]-1, \infty[$ فما الفترة التي تُعبر عن مُكملة X ؟ .. . . .

(أ) $[-1, \infty[$ (ب) $]-\infty, -1[$ (جـ) $]-\infty, -1]$ (د) $]-\infty, 1]$

5 $[2, 7] - \{2, 7\} = ...$

(أ) $]2, 7[$ (ب) $[1, 6]$ (جـ) $\{0\}$ (د) $\varnothing$

6 $[-3,5]-]-3,5[=$ ....

(أ) $]-3,5[$ (ب) $[-3,5]$ (جـ) $\{-3,5\}$ (د) $\varnothing$

7 $[0,5]\cup[3,8[=$ ....

(أ) $]3,5]$ (ب) $[3,5]$ (جـ) $[0,8]$ (د) $[0,8[$

8 $[1,5]\cap]-2,3]=$ ....

(أ) $\{1,3\}$ (ب) $]1,3[$ (جـ) $[1,3]$ (د) $[1,3[$

9 $]-1,2[-[1,4]=$ ....

(أ) $]-1,1[$ (ب) $\{-1,1\}$ (جـ) $]-1,1]$ (د) $[-1,1]$

10 ما الفترة التي تُمثل $]-2,3]\cap R^-$ ؟ ....

(أ) $]-2,0[$ (ب) $]-2,0]$ (جـ) $]-2,1]$ (د) $]0,3]$

11 $\{7,10,12\}-]7,12[=$ ....

(أ) $\{10\}$ (ب) $\{7,12\}$ (جـ) $\varnothing$ (د) $\{7,10,12\}$

12 مجموع جميع الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة $]-100,100[$ هو ....

(أ) -100 (ب) 100 (جـ) 200 (د) 0

7 إذا كانت: $Y=[1,4]$ ، $X=]-2,2[$ ، فأوجد مستعينًا بخط الأعداد:

$X\cap Y$, $X\cup Y$, $Y-X$, $X-Y$

8 إذا كانت: $B=]-\infty,2]$ ، $A=]-5,\infty[$ ، فأوجد مستعينًا بخط الأعداد:

$\grave{A}$, $B-A$, $A-B$, $A\cap B$, $A\cup B$

9 إذا كانت: $B=]-\infty,4]$ ، $A=[-1,7]$ ، فأوجد ما يأتي:

$\grave{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $B-A$, $A-B$

10 إذا كانت: $C=\{4,-3\}$ ، $B=[3,\infty[$ ، $A=[-1,4]$ ، فأوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًّا من:

1 $A\cup B$ 2 $A\cap B$ 3 $A-B$ 4 $A-C$

5 $B\cap C$ 6 $B-A$ 7 $\grave{A}$ 8 $\grave{B}$

11 أوجد كلًّا مما يأتي:

1 $[2,5[\cup[-2,3]$ 2 $[2,7]-[3,8[$ 3 $]-1,3[\cap]-5,1]$

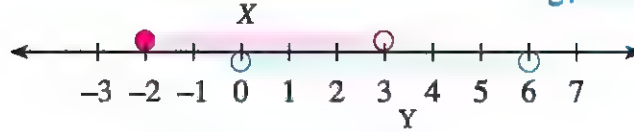
4 $\grave{[4,8[}$ 5 $[3,\infty[\cap]-\infty,7[$ 6 $]2,5]\cup]5,\infty[$

7 $R\cap[2,5[$ 8 $R^+\cup]0,2]$ 9 $R^- -[-2,0[$

10 $R^-\cup R^+$ 11 $N\cap[-3,0[$ 12 $Z^+\cap]-1,2[$

13 $Z^-\cap]-2,3]$ 14 $\{3,5\}\cup]3,5[$ 15 $\{3,7\}\cap[3,7[$

12 أوجد مستعينًا بخط الأعداد المقابل:



1 $X \cap Y =$ ......
2 $X \cup Y =$ ....
3 $X^{\backslash} =$ ......
4 $Y - X =$ ....

13 إذا كانت: $A =]-\infty , 4[$ ، $B =]2 , 8[$ فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى:

1 $A \cup B$
2 $B^{\backslash}$
3 $A - B$
4 $B - A$

14 تغذية: قررت ليلى حفظ نوعين من الأغذية فى الثلاجة:

1 النوع الأول هو اللبن الطازج، ويفُضل حفظه فى درجة حرارة من $1\,^{\circ}C$ إلى $4\,^{\circ}C$
2 النوع الثانى هو اللحوم الطازجة، ويفُضل حفظه فى درجة حرارة من $-2\,^{\circ}C$ إلى $2\,^{\circ}C$
3 ما الفترة التى يمكن أن تضبط ليلى الثلاجة عليها حتى تحفظ النوعين معًا فى نفس الوقت دون أن يتلف أى منهما؟



15 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 إذا كان: $x \in [-4 , 1]$ فإن: $x^2 \in$ ....

(أ) $[-4 , 0]$ (ب) $[0 , 16]$ (جـ) $[1 , 16]$ (د) $[0 , 1]$

2 إذا كان: $x \in]0 , 1[$ ، $y \in]-1 , 0[$ فإن: y^3 .... x^2

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

3 إذا كان: $Y \subset R$ ، $]3 , 5[= Y - [3 , 5]$ فإن: $Y =$ ....

(أ) $]3 , 5[$ (ب) $]3 , 5]$ (جـ) $\{3 , 5\}$ (د) $\varnothing$

16 إذا كانت: $A \cap B = [1 , 4]$ ، $A \cup B = [-1 , 4]$ ، وكان $A \subset B$ ، فأوجد كلًّا من:

A ، B ، $B - A$

17 إذا كانت: a , b , c , d أعدادًا حقيقية ، $a < c < b < d$ ، فأوجد كلًّا من:

$[a , b] \cap [c , d]$ ، $[a , b] - [c , d]$

18 إذا كانت: $[-2 , a] \cap [b , 7] = [2 , 4]$ فما قيمة $\frac{b^a}{a^b}$ ؟

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 $[-1,3]\cap[1,4]=$ ....

(أ) $[1,3[$ (ب) $]1,3]$ (جـ) $[1,3]$ (د) $]1,3[$

2 إذا كان: $x\in[-2,5]$ فإن: $x^2\in$ ....

(أ) $[-4,0]$ (ب) $[0,25]$ (جـ) $[0,4]$ (د) $[4,25]$

3 مجموع جميع الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة $]-50,50[$ هو ....

(أ) -50 (ب) 50 (جـ) 100 (د) 0

4 مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة هي ....

(أ) $[0,\infty[$ (ب) $]-\infty,0[$ (جـ) $]-\infty,0]$ (د) $]0,\infty[$

5 $[5,\infty[\cup R^-=$ ....

(أ) $]0,5]$ (ب) $R-[0,5[$ (جـ) R (د) $R-]0,5]$

6 أي الأعداد الآتية هو عدد غير نسبي؟ ....

(أ) $\sqrt[3]{-27}$ (ب) $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$ (جـ) $0.\overline{5}$ (د) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

7 إذا كان: $A\subset R$، $A\cup]4,7]=[4,7]$ فأي ما يأتي يمكن أن يُساوي A ؟

(أ) $\{4\}$ (ب) $\{4,9\}$ (جـ) $\{7\}$ (د) $[7,9[$

8 إذا كان: $x\in Z$، $x<\sqrt{29}<x+1$ فما قيمة x ؟ ....

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

2 أجب عما يأتي:

1 إذا كانت: $A=]-\infty,1]$، $B=]-2,2]$ ، فأوجد على صورة فترة $B-A$

2 رتب الأعداد: $6.3\overline{6}$ ، $6\frac{4}{5}$ ، 7 ، $\sqrt{40}$ ترتيبًا تنازليًّا

3 أوجد في R مجموعة حل المعادلة: $\frac{3}{2}x^2=\frac{27}{32}$

4 أوجد كلًّا مما يأتي: (أ) $[2,5]-\{2,5\}$ (ب) $[0,5[-\{5\}$

5 إذا كانت: $Y=[-2,5[$ ، $X=]-4,1]$ ، فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتي:

(أ) $X\cap Y$ (ب) $X\cup Y$ (جـ) $Y-X$

ذاكر

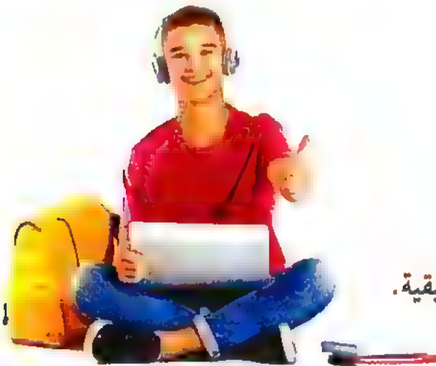
الدرس

العمليات على الأعداد الحقيقية
(Operations On Real Numbers)





نواتج التعلم



- يجرى الطالب العمليات الحسابية (+ ، − ، × ، ÷) على الأعداد الحقيقية.
- يتعرف الطالب على خواص جمع وضرب الأعداد الحقيقية.
- يستخدم الطالب خواص العمليات الحسابية فى حل تمارين الأعداد الحقيقية.
- يحل الطالب بعض المشكلات الحياتية مستخدمًا العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.

مفردات أساسية

- الانغلاق (Closure)
- الإبدال (Commutative)
- الدمج (Associative)
- المحايد الجمعى (Additive identity)
- المحايد الضربى (Multiplicative Identity)
- المعكوس الجمعى (Additive Inverse)
- الحد الجذرى (Radical Term)
- المعكوس الضربى (Multiplicative Inverse)

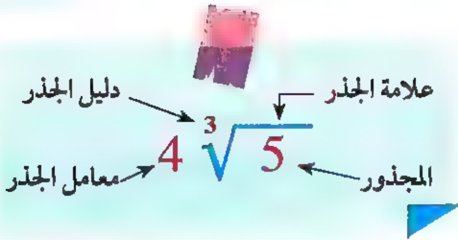
فكر وناقش



- حجرة مستطيلة الشكل بعداها
$(\sqrt{7}+1)$ م ، $(\sqrt{7}-1)$ م ،
وحجرة أخرى مربعة الشكل طول ضلعها $\sqrt{7}$ م.
أى من الحجرتين أكبر فى المساحة؟ وأيهما أكبر فى المحيط؟ ناقش.

- فى هذا الدرس سوف نتعلم كيفية إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.
مما سيمكنك من حل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم 1 العمليات على الأعداد الحقيقية:



أولًا مفهوم الحدود الجذرية المتشابهة:

- هى حدود تحتوى على جذور لها نفس دليل الجذر ونفس المجذور (العدد الذى أسفل الجذر)

أمثلة لحدود جذرية متشابهة	أمثلة لحدود جذرية غير متشابهة
$3\sqrt{2}$ ، $7\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$ ، $5\sqrt{3}$
$-4\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt[3]{5}$	$2\sqrt[3]{7}$ ، $2\sqrt{7}$

ثانيًا إجراء العمليات الحسابية

- عند إجراء العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الحدود الجذرية: نستخدم نفس طريقة جمع وطرح الحدود الجبرية المتشابهة، وعند ضرب الحدود الجذرية نستخدم نفس طريقة ضرب الحدود الجبرية.

مثال 1

إذا كانت $x=-3\sqrt{2}$ ، $y=\sqrt{2}$ ، $Z=\sqrt[3]{3}$ فأوجد قيمة كل مما يأتى:

1 $x+y$ 2 $x\times y$ 3 $\frac{x}{2y}$ 4 $2y-Z^3$

الحل

1 $x+y=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}$
$=(-3+1)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

2 $x\times y=-3\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
$=(-3\times1)\times(\sqrt{2})^2=-3\times2=-6$

3 $\therefore \frac{x}{2y}=\frac{-3\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{-3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
$=-\frac{3}{2}\times1=-\frac{3}{2}$

4 $2y-Z^3=2\times(\sqrt{2})-(\sqrt[3]{3})^3$
$=2\sqrt{2}-3$

لاحظ أن

- لوضع العدد $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ فى أبسط صورة، يجب جعل مقامه عددًا صحيحًا بضرب البسط والمقام فى الجزء غير النسبى الموجود بالمقام وهو $\sqrt{2}$
- إذا كان $\sqrt[n]{a}\in R$ ، فإن: $(\sqrt[n]{a})^n=a$ فمثلًا: $[(\sqrt{x})^2=x ، x\geq0]$
- لأى عدد حقيقى a إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن: $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ ، وإذا كان n عددًا فرديًّا فإن: $\sqrt[n]{a^n}=a$

فمثلًا: $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$ ، $\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$

مثال 2

اكتب كلًّا من الأعداد الآتية فى أبسط صورة بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا.

1 $\frac{6}{\sqrt{3}}$ 2 $\frac{8}{3\sqrt{2}}$ 3 $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

الحل

1 بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

2 بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{2}$

$\therefore \frac{8}{3\sqrt{2}}=\frac{8}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3\times2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

3 بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{5}$

$\therefore \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{(2-\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}-5}{5}$

تعلم 2 خواص العمليات (+ ، ×) على الأعداد الحقيقية:

إذا كانت a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية فإن:

الخاصية	فى عملية الجمع	فى عملية الضرب
الانغلاق	$a + b \in R$	$a \times b \in R$
الإبدال	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
الدمج (التجميع)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
توزيع الضرب على الجمع	$a (b + c) = ab + ac$ ، $(b + c) a = ba + ca$	
المحايد	المحايد الجمعى هو 0 $a + 0 = 0 + a = a$	المحايد الضربى هو 1 $a \times 1 = 1 \times a = a$
المعكوس	المعكوس الجمعى للعدد a هو $(-a)$ حيث: $a + (-a) = 0$	المعكوس الضربى للعدد a هو: $\frac{1}{a}$ (حيث $a \neq 0$) حيث: $a \times \frac{1}{a} = 1$

لاحظ أن

لأى ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c يمكن استنتاج أن:

- عملية الطرح فى R ليست إبدالية أى أن: $a - b \neq b - a$
- عملية القسمة فى R ليست إبدالية أى أن: $\frac{b}{a} \neq \frac{a}{b}$ [حيث $b \neq 0$ و $a \neq 0$]
- $\frac{a}{b} \in R$ بشرط $b \neq 0$
- $a (b - c) = ab - ac$

مثال 3 أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $2\sqrt{3}(5 + \sqrt{3}) - 3\sqrt{3}$

2 $(2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)$

3 $(\sqrt{7} + 1)(2\sqrt{7} - 3)$

4 $(5\sqrt{3} - 2)^2$

الحل

1 $2\sqrt{3}(5 + \sqrt{3}) - 3\sqrt{3}$

$2\sqrt{3} \times 5 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3} + 2 \times 3 - 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3} + 6$

2 $(2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)$

$= (2\sqrt{5})^2 - (3)^2 = 20 - 9 = 11$

3 $(\sqrt{7} + 1)(2\sqrt{7} - 3)$

$= \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3$

$= 14 - \sqrt{7} - 3 = 11 - \sqrt{7}$

4 $(5\sqrt{3} - 2)^2 = (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 5\sqrt{3} + (2)^2$

$= 75 - 20\sqrt{3} + 4 = 79 - 20\sqrt{3}$

س؟ سؤال 1

1 إذا كانت: $x = -6\sqrt{5}$ ، $y = \sqrt{5}$ ، $Z = \sqrt[3]{2}$ ، فأوجد قيمة:

(أ) $x + y$ (ب) $x \times y$ (جـ) $\frac{x}{3y}$ (د) $Z^3 - x$

2 اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى أبسط صورة بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا:

(أ) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (ب) $\frac{-7}{\sqrt{3}}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



نقاط هامة

- $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ◂ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ◂ $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

◂ إيجاد ناتج الضرب بمجرد النظر:

الأولان — الأخران

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

الوسطين + الطرفين

مثال 4 أوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى والمعكوس الضربى لكل مما يأتى:

1 $-4\sqrt{2}$ 2 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 3 $3\sqrt{7}-4$ 4 $3+\sqrt{2}$

الحل

1 المعكوس الجمعى $=-(-4\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

المعكوس الضربى $=\frac{1}{-4\sqrt{2}}$

$\therefore -\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{-1}{4\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4\times 2}=\frac{-\sqrt{2}}{8}$

∴ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $=\frac{-\sqrt{2}}{8}$

2 المعكوس الجمعى $=\frac{-\sqrt{5}}{5}$

المعكوس الضربى $=\frac{5}{\sqrt{5}}$

$\therefore \frac{5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

∴ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $=\sqrt{5}$

3 المعكوس الجمعى $=-(3\sqrt{7}-4)=-3\sqrt{7}+4$

المعكوس الضربى $=\frac{1}{3\sqrt{7}-4}$

$\therefore \frac{1}{(3\sqrt{7}-4)}\times\frac{(3\sqrt{7}+4)}{(3\sqrt{7}+4)}=\frac{(3\sqrt{7}+4)}{63-16}=\frac{(3\sqrt{7}+4)}{47}$

∴ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $=\frac{3\sqrt{7}+4}{47}$

4 المعكوس الجمعى $=-(3+\sqrt{2})=-3-\sqrt{2}$

المعكوس الضربى $=\frac{1}{3+\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{1}{3+\sqrt{2}}\times\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}}{9-2}=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$

∴ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$

سؤال 2

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{5}}{10}$ هو .... $[-2\sqrt{5}$ ، $2\sqrt{5}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{10}]$

2 المعكوس الجمعى للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ هو .... $[-7$ ، $-\sqrt{7}$ ، 7 ، $\frac{\sqrt{7}}{7}]$

3 المعكوس الضربى للعدد $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ يساوى $\frac{\cdots\cdots}{3}$ $[\frac{4}{3\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{2}$ ، $5\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}]$

4 المعكوس الضربى للعدد $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ هو ...... $[(-\sqrt{3}-2)$ ، $(-\sqrt{3}+2)$ ، $(\sqrt{3}-2)$ ، $(\sqrt{3}+2)]$

2 اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا واكتب العدد فى أبسط صورة:

1 $\frac{12}{\sqrt{3}+3}$ 2 $\frac{8}{3+\sqrt{5}}$ 3 $\frac{22}{2\sqrt{5}-3}$

مثال 5

إذا كانت $x = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ ، $y = \sqrt{5} + 2$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة؟

1 $(x+y)^2$ 2 xy 3 x^2+y^2

الحل

نضع $x = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ فى أبسط صورة بضرب كلٍّ من البسط والمقام فى $(\sqrt{5}-2)$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}-2}{1} = \sqrt{5}-2$$

1 $\therefore (x+y)^2 = (\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$

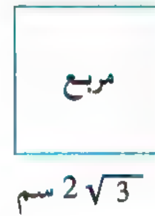
2 $xy = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = (\sqrt{5})^2 - (2)^2 = 5 - 4 = 1$

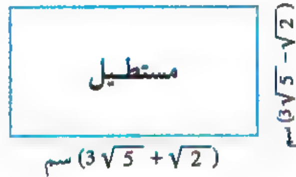
3 $x^2+y^2 = (\sqrt{5}-2)^2 + (\sqrt{5}+2)^2 = 5 - 2\times\sqrt{5}\times 2 + 4 + 5 + 2\times\sqrt{5}\times 2 + 4$

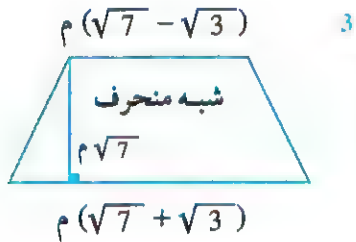
$= 5 - 4\sqrt{5} + 4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 18$

مثال 6

أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة؟

1


2


3


الحل

1 ∵ مساحة المربع $(A) = S^2$ ، $\therefore A = (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ ، ∴ مساحة المربع = 12 $سم^2$

2 مساحة المستطيل $(A) = LW$ ، $\therefore A = (3\sqrt{5}+\sqrt{2}) \times (3\sqrt{5}-\sqrt{2}) = 43$

∴ مساحة المستطيل = 43 $سم^2$

3 ∵ مساحة شبه المنحرف (A) = القاعدة المتوسطة × الارتفاع

$$\therefore A = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2} \times \sqrt{7} = \frac{2\sqrt{7}}{2} \times \sqrt{7} = 7$$

∴ مساحة شبه المنحرف = 7 $م^2$

مثال 7

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $5\sqrt{3} - 3\sqrt{11} + \sqrt{3} + 5\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$ 2 $-3\sqrt{7} + 3\sqrt[3]{5} + 5\sqrt{7} - \sqrt[3]{5}$

الحل

1 $5\sqrt{3} - 3\sqrt{11} + \sqrt{3} + 5\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$

$= (5\sqrt{3} + \sqrt{3}) + (-3\sqrt{11} + 5\sqrt{11} - 2\sqrt{11})$

$= 6\sqrt{3} + 0$

$= 6\sqrt{3}$

2 $-3\sqrt{7} + 3\sqrt[3]{5} + 5\sqrt{7} - \sqrt[3]{5}$

$= (-3\sqrt{7} + 5\sqrt{7}) + (3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5})$

$= 2\sqrt{7} + 2\sqrt[3]{5}$

س؟ سؤال 3

إذا كانت: $x = \frac{1}{\sqrt{10}+3}$ ، $y = \sqrt{10} + 3$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $(x-y)^2$ 2 xy 3 x^2+y^2

أسئلة الكتاب المدرسى

العمليات على الأعداد الحقيقية:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الحد الجذرى المشابه للحد الجذرى $3\sqrt{2}$ هو ....

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6}$ (جـ) $-2\sqrt{2}$ (د) $-3\sqrt{3}$

2 الحدان الجذريان المتشابهان هما ....

(أ) $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$ (جـ) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ (د) $-2\sqrt[3]{2}$, $5\sqrt[3]{2}$

3 ما قيمة : $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{6}$ (د) 3

4 ما قيمة : $2\sqrt[3]{7}-5\sqrt[3]{7}$ ؟

(أ) $3\sqrt[3]{7}$ (ب) $-3\sqrt[3]{7}$ (جـ) $7\sqrt[3]{7}$ (د) $\sqrt[3]{7}$

5 $3\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=$ ....

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) 3 (جـ) $4\sqrt{2}$ (د) $\sqrt{2}$

6 $4\sqrt[3]{9}-9\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{9}=$ ....

(أ) $16\sqrt[3]{9}$ (ب) $2\sqrt[3]{9}$ (جـ) $10\sqrt[3]{9}$ (د) $-2\sqrt[3]{9}$

7 إذا كان : $a\sqrt{5}-4\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ فإن: $a=$ ....

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) 7 (د) 10

8 إذا كان : $\sqrt[3]{5}+3a=4\sqrt[3]{5}$ فإن: $a=$ ....

(أ) 1 (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $\sqrt[3]{5}$ (د) 5

9 $\sqrt{11}\times\sqrt{11}=$ ....

(أ) $\sqrt{22}$ (ب) $2\sqrt{11}$ (جـ) 11 (د) $11\sqrt{11}$

10 $-2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}=$ ....

(أ) $-10\sqrt{3}$ (ب) -30 (جـ) $-10\sqrt{6}$ (د) $3\sqrt{3}$

11 إذا كان : $(2\sqrt{3})^n=12$ فإن: $n=$ ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 6

2 أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $\sqrt{5}+2\sqrt{5}$ 2 $6\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ 3 $\sqrt[3]{7}-6\sqrt[3]{7}$

4 $-4\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})$ 5 $3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+\sqrt{7}$ 6 $2\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}$

7 $\sqrt{8}\times\sqrt{8}$ 8 $-2\sqrt{3}\times7$ 9 $-3\sqrt{5}\times\sqrt{5}$

10 $-3\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}$ 11 $\frac{-1}{3}\sqrt[3]{2}\times 3\sqrt[3]{2}\times 5\sqrt[3]{2}$ 12 $(3\sqrt[3]{4})^3$

13 $(\sqrt[3]{5})^3\times 2\sqrt{3}$ 14 $\frac{(\sqrt{6})^2\times(-3\sqrt{7})}{6\sqrt{7}}$ 15 $\frac{10\sqrt[3]{7}\times(\sqrt[3]{5})^3}{-5\sqrt[3]{7}}$

3 إذا كانت: $x=-2\sqrt{5}$ ، $y=\sqrt{5}$ ، $Z=\sqrt[3]{7}$ فأوجد قيمة كل مما يأتى:

1 $x+y$ 2 $y-x$ 3 $x\times y$ 4 $\frac{x}{2y}$ 5 $3x-Z^3$

4 اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا، واكتب العدد فى أبسط صورة:

1 $\frac{1}{\sqrt{15}}$ 2 $\frac{30}{\sqrt{10}}$ 3 $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ 4 $\frac{14}{5\sqrt{7}}$ 5 $\frac{1}{2+\sqrt{6}}$

خواص العمليات على الأعداد الحقيقية:

5 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{7}+$ ....

(أ) 3 (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) 0

2 $5+7\sqrt{2}+4-\sqrt{2}=$ ....

(أ) 15 (ب) $1+7\sqrt{2}$ (جـ) $1+8\sqrt{2}$ (د) $9+6\sqrt{2}$

3 $\sqrt{6}+(-\sqrt{6})=$ ....

(أ) $2\sqrt{6}$ (ب) 1 (جـ) 0 (د) 6

4 إذا كانت: $a+\sqrt{5}=0$ فما قيمة a ؟

(أ) 0 (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $-\sqrt{5}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

5 المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[3]{8}$ هو ....

(أ) -2 (ب) $-\sqrt{8}$ (جـ) $\sqrt[3]{4}$ (د) $-\sqrt[3]{4}$

6 ما المعكوس الجمعى للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ فى أبسط صورة؟

(أ) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ب) 7 (جـ) $-\sqrt{7}$ (د) -7

7 العنصر المحايد الجمعى فى R هو ....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 2 (د) 0

8 العنصر المحايد الضربى فى R هو ....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 2 (د) 0

9 $\frac{3}{\sqrt{2}}\times$ .... $=1$

(أ) 1 (ب) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (د) 0

10 المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{3}$ هو ....

(أ) $-\sqrt{3}$ (ب) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (د) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

11 المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{3}}{6}$ هو ....

(أ) $\sqrt{6}$ (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) $2\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{2}$

12 إذا كان : $a \times \sqrt{2} = 1$ فما قيمة a ؟

(أ) 1 (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $-\sqrt{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 ما المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{3} - 2$ ؟

(أ) $2 - \sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3} + 2$ (جـ) $-\sqrt{3} - 2$ (د) $\sqrt{3} - 2$

6 أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $4\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + \sqrt{7} + 4\sqrt{5}$

2 $2\sqrt[3]{7} - 5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{4}$

3 $2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} + \sqrt{7} + 2\sqrt{3}$

4 $2\sqrt{5} - 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$

5 $\sqrt{3}\,(5\sqrt{3} - 3)$

6 $2\sqrt{5}\,(3 + \sqrt{5}) - 6\sqrt{5}$

7 $(\sqrt{3} - 3)(4\sqrt{3} + 2)$

8 $(5\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} + 3)$

9 $(3\sqrt{7} - 4)^2$

10 $\sqrt{5}\,(2 - \sqrt{5}) - 2(1 + \sqrt{5})$

11 $(3\sqrt{10} + 4)(3\sqrt{10} - 4) - 4$

12 $(3 + 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}\,(1 - \sqrt{2})$

7 أوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى، والمعكوس الضربى لكل من:

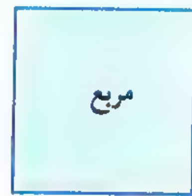
1 $-3\sqrt{5}$ 2 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3 $\sqrt{3} - 2$ 4 $2\sqrt{6} - 5$

8 إذا كانت: $x = \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$ ، $y = \sqrt{3} + 2$ فأوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة:

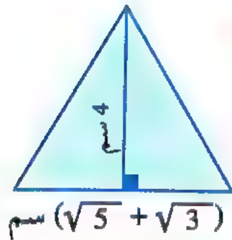
1 $(x + y)^2$ 2 $x\,y$ 3 $x^2 + y^2$

9 إذا كان: $\frac{x}{3\sqrt{2}} = \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1$ فأوجد قيمة: $x^2 + y^2$

10 أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة:

1


2


3


11 أنشأ عمر فى حديقة منزله حوضين لزراعة الورود، أحدهما، مستطيل الشكل بعداه $(5 - \sqrt{7})$ م، $(5 + \sqrt{7})$ م، والآخر مربع الشكل له نفس مساحة الحوض الأول، أوجد محيط كل من الحوضين، وأيهما له المحيط الأكبر؟

تفكير إبداعى TIMSS

12 عند إنشاء مخزن على شكل متوازى مستطيلات، كانت أبعاده a , b , c متر.

فإذا كان: $ab = 3\sqrt{3}$, $bc = 5\sqrt{3}$, $ac = 5$ فأوجد حجم المخزن.

13 إذا كان: $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$ فأوجد قيمة $x^2 + \frac{1}{x^2}$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 العنصر المحايد الضربى هو ....

(أ) 0 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 2

2 المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{3} - 7$ هو ....

(أ) $-7 - \sqrt{3}$ (ب) $7 + \sqrt{3}$ (جـ) $-(7 + \sqrt{3})$ (د) $\sqrt{3} - 7$

3 إذا كان: $x \in Z$ ، $x < \sqrt{85} < x + 1$ فما قيمة x ؟

(أ) 80 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 9

4 $-4\sqrt{7} + \sqrt{7} =$ ....

(أ) $5\sqrt{7}$ (ب) $3\sqrt{7}$ (جـ) $-3\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{7}$

5 إذا كانت $a \in]1 , 7[$ فإن a يمكن أن تساوى أيًّا مما يلى؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 7 (د) 8

6 المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{3}}{3}$ فى أبسط صورة ....

(أ) 3 (ب) $2\sqrt{3}$ (جـ) 1 (د) $\sqrt{3}$

7 $3\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} =$ ....

(أ) 5 (ب) $5\sqrt[3]{5}$ (جـ) 15 (د) $5\sqrt[3]{3}$

8 $(3\sqrt{2})^2 =$ ....

(أ) 36 (ب) 18 (جـ) 6 (د) $6\sqrt{2}$

2 أجب عما يأتى:

1 أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة:

(أ) $2\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) - 5\sqrt{3}$ (ب) $-2\sqrt{7} \times \sqrt{7}$

(جـ) $(\sqrt{5} - 2) - (3\sqrt{5} + 3)$ (د) $(3\sqrt{2} - 5)^2$

2 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى Q':

(أ) $5x^2 - 32 = 3$ (ب) $2x^3 + 1 = -15$

3 إذا كانت $B =]3 , 7[$ ، $A =]-1 , 5]$ فأوجد مستعينًا بخط الأعداد:

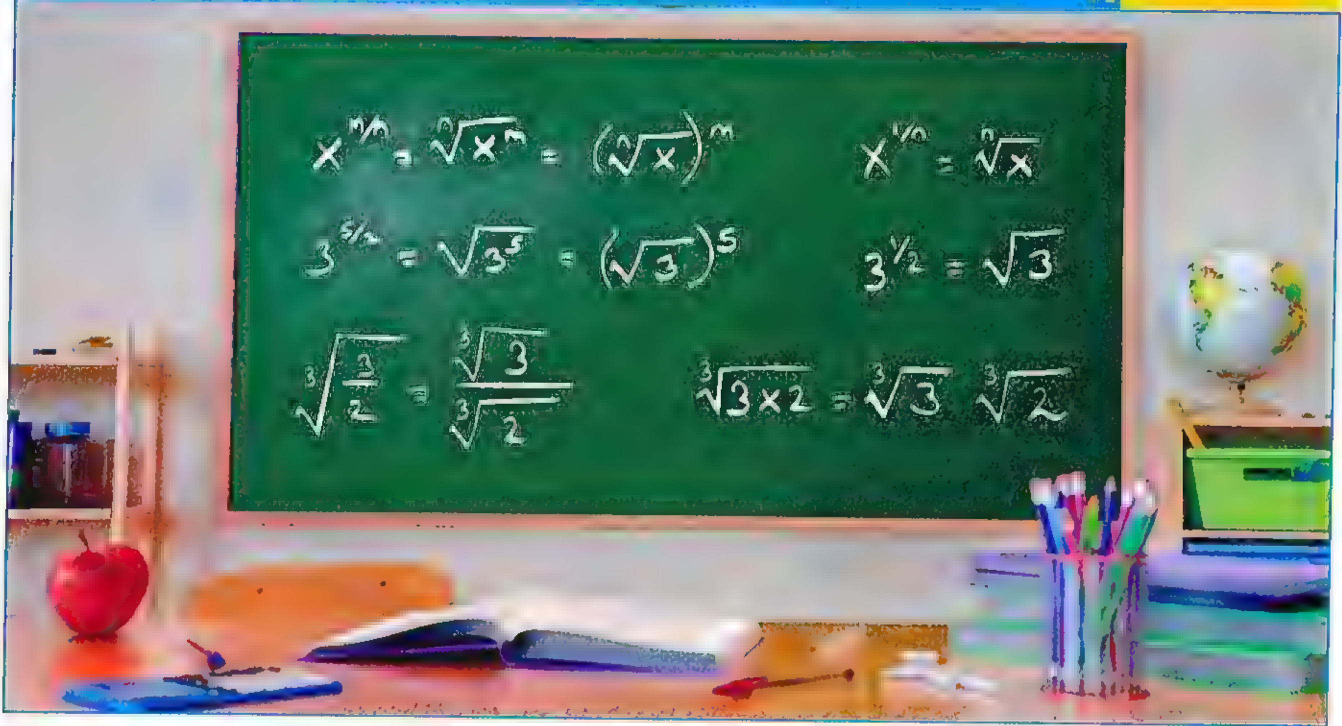
$A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$

4 اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا، واكتب العدد فى أبسط صورة:

(أ) $\frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

ذاكر الدرس 4

قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية
(Laws of Square and Cube Roots)





نواتج التعلم



- يتعرف الطالب على قوانين ضرب وقسمة الجذور التربيعية.
- يتعرف الطالب على قوانين ضرب وقسمة الجذور التكعيبية.
- يستخدم الطالب قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية فى تبسيط الأعداد.
- يستخدم الطالب قوانين الجذور فى حل المشكلات الحياتية.

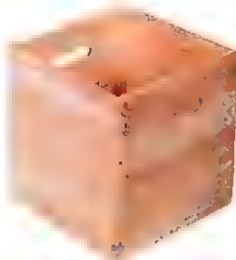
مفردات أساسية

- الجذر التربيعى (Square root)
- الجذر التكعيبى (Cube root)



فكر وناقش





- قام عُمران بعمل صندوق خشبى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $\sqrt{18}$ متر وارتفاعه $\sqrt{12}$ متر.
وقام سمير بعمل صندوق آخر، ولكن على شكل مكعب طول ضلعه $\sqrt{24}$ متر.
فأى منهما يكون أكبر حجمًا من الآخر؟

- فى هذا الدرس، سوف تتعلم قوانين الجذور، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم 1 ضرب وقسمة الجذور التربيعية:

• إذا كان a , b عددين حقيقيين غير سالبين، فـإن:

1 ▸ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

فمثلًا

$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

2 ▸ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ بشرط أن: $b \neq 0$

فمثلًا

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

مثال 4 ضع فى أبسط صورة كلًّا من الأعداد الآتية:

1 $\sqrt{24}$ 2 $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ 3 $6\sqrt{\frac{2}{3}}$

الحـل

1 حلل العدد 24 إلى عاملين أحدهما 4 وهو أكبر عامل مربع كامل ($24 = 4 \times 6$ ◂)

$\therefore \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

2 ▸ $4\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\,\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

حل اخر

$\because 4 = \sqrt{16}$

$\therefore 4\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{16 \times \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

تذكـر أن

لجعل مقام العدد غير النسبى $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ عددًا صحيحًا اضرب كلًّا من بسطه ومقامه فى $\sqrt{b}$ كالتالى:

▸ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

3 ▸ $6\sqrt{\frac{2}{3}} = 6\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$

نقاط هامة

• ▸ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

فمثلًا

$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$

$7 \neq 5$

• ▸ $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

فمثلًا

$\sqrt{100} - \sqrt{64} \neq \sqrt{100-64}$

$2 \neq 6$

• ▸ $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

فمثلًا

$\sqrt{6^2+8^2} \neq 6+8$

$10 \neq 14$

• ▸ $\sqrt{a^2-b^2} \neq a-b$

فمثلًا

$\sqrt{15^2-12^2} \neq 15-12$

$9 \neq 3$

سؤال 1

ضع فى أبسط صورة كلًّا من الأعداد الآتية:

1 $\sqrt{50}$ 2 $\frac{8\sqrt{45}}{4\sqrt{5}}$ 3 $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ 4 $\frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}}$ 5 $2\sqrt{\frac{5}{2}}$

مثال 2 اختصر كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

1 $2\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

2 $\sqrt{75}-2\sqrt{27}+3\sqrt{\frac{1}{3}}$

الحل

1 $2\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{50} = 2\sqrt{16\times 2}-\sqrt{9\times 2}+\sqrt{25\times 2}$

$= 2\times\sqrt{16}\times\sqrt{2}-\sqrt{9}\times\sqrt{2}+\sqrt{25}\times\sqrt{2}$

$= 2\times 4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$= 8\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

2 $\sqrt{75}-2\sqrt{27}+3\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt{25\times 3}-2\sqrt{9\times 3}+\sqrt{9}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt{25}\times\sqrt{3}-2\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{9\times\frac{1}{3}}$

$=5\sqrt{3}-2\times 3\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{3}-6\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$

لاحظ أن

عند جمع وطرح الحدود الجذرية غير المتشابهة، قم بتبسيط كل حد على حدة، فإذا حصلت على حدود جذرية متشابهة يمكنك جمعها أو طرحها.

مثال 3 أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

1 $\sqrt{640}=x\sqrt{10}$

2 $x+\sqrt{44}=\sqrt{11}$

3 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

4 $2\sqrt{3}\times 4x=8\sqrt{6}$

الحل

1 $\because \sqrt{640}=x\sqrt{10}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{640}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{640}{10}}=\sqrt{64}=8$

2 $\because x+\sqrt{44}=\sqrt{11}$

$\therefore x+\sqrt{4\times 11}=\sqrt{11}$

$x+2\sqrt{11}=\sqrt{11}$

$\therefore x=\sqrt{11}-2\sqrt{11}=-\sqrt{11}$

3 $\because \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$\therefore \sqrt{x}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}$

$\therefore x=4$

4 $\because 2\sqrt{3}\times 4x=8\sqrt{6}$

$\therefore 8\sqrt{3}x=8\sqrt{6}$

$\therefore x=\frac{8\sqrt{6}}{8\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$

س؟ سؤال 2

1 اختصر كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

(أ) $2\sqrt{3}+5\sqrt{27}-\sqrt{48}$

(ب) $\sqrt{45}-2\sqrt{20}+2\sqrt{5}$

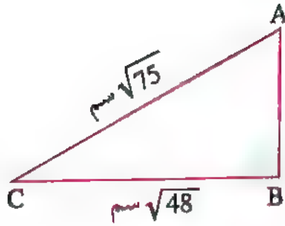
2 أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

(أ) $\sqrt{162}=x\sqrt{2}$

(ب) $x-\sqrt{125}=\sqrt{5}$

(جـ) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{75}}$

مثـال 4 في الشكل المقابل:



ABC مثلث قائم الزاوية في B ، محيطه $\sqrt{432}$ سم ، طول $\overline{CB}$ يساوي $\sqrt{48}$ سم ،

وطول $\overline{AC}$ يساوي $\sqrt{75}$ سم

أوجد طول $\overline{AB}$ ثم أوجد مساحة المثلث ABC

الحـل

$\because$ محيـط المثلـث = مجموع أطوال أضلاعـه

$\therefore\ \sqrt{75} + \sqrt{48} + AB = \sqrt{432}$

$\therefore\ \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} + AB = \sqrt{144 \times 3}$

$\therefore\ 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + AB = 12\sqrt{3}$

$\therefore\ 9\sqrt{3} + AB = 12\sqrt{3}$

$\therefore\ AB = 12\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

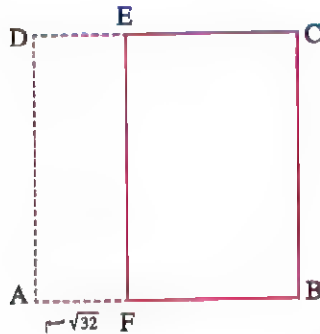
أي أن: طول $\overline{AB}$ يساوي $3\sqrt{3}$ سم

$\because$ مساحة المثلث ABC = $\frac{1}{2} \times CB \times AB$

$\therefore$ مساحة المثلث ABC = 18سم^2

(لأن: $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 3 = 18$)

مثـال 5 في الشكل المقابل:



مساحـة المربع ABCD تسـاوى 200سم^2 ،

قُطع منه المستطيل AFED الذى عرضه $\sqrt{32}$ سم ،

فما مساحة الشكل FBCE ؟

الحـل

$\because$ مساحـة المربـع ABCD = طول الضلع × نفسـه

$\therefore\ AD \times AD = 200 \qquad \therefore\ (AD)^2 = 200 \qquad \therefore\ AD = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

أى أن طول $\overline{AD}$ يساوى $10\sqrt{2}$ سم

$\because$ مساحـة المستطيل AFED = الطول × العرض

$\therefore$ مساحـة المستطيل تساوى 80 سم^2

(لأن: $AD \times AF = 10\sqrt{2} \times \sqrt{32} = 10\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 80$)

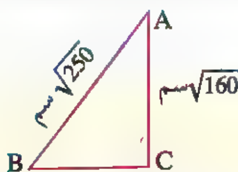
$\because$ مساحـة الشكل FBCE = مساحـة المربع ABCD – مساحـة المستطيل AFED

$\therefore$ مساحـة الشكل FBCE = 120 سم^2 (لأن: $200 - 80 = 120$)

سؤال 3

في الشكل المقابل: ABC مثلث محيطه $\sqrt{1440}$ سم

أوجد طول $\overline{BC}$



مثال 6

إذا كان: $x=\sqrt{7}+\sqrt{5}$ ، $y=\frac{2}{x}$

فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: $\frac{x+y}{xy}$

الحل

$$y=\frac{2}{x}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$$

لاحظ أن

لتبسيط y اجعل المقام عددًا نسبيًّا بضرب البسط والمقام فى $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

سؤال 4

1. إذا كانت: $x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ، $y=\frac{3}{x}$ فأوجد فى أبسط صورة:

   (أ) $x-y$ (ب) $\frac{y}{x}$

2. إذا كانت: $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ فأوجد فى أبسط صورة: $x+\frac{1}{x}$

تعلم 2 ضرب وقسمة الجذور التكعيبية:

- إذا كان a , b عددين حقيقيين، فإن:

1. $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\times b}$

   فمثلًا $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5\times 2}=\sqrt[3]{10}$

2. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ، $b\neq 0$

   فمثلًا $\frac{\sqrt[3]{-32}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{-32}{4}}=\sqrt[3]{-8}=-2$

نقاط هامة

- $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\neq\sqrt[3]{a+b}$ فمثلًا $\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{64}\neq\sqrt[3]{125+64}$
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\neq\sqrt[3]{a-b}$ فمثلًا $\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{27}\neq\sqrt[3]{1000-27}$
- لجعل مقام العدد غير النسبى $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ عددًا صحيحًا، اضرب كلًّا من بسطه ومقامه فى $\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b}$ كالتالى:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\times\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}\times\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}\text{ ، } b\neq 0$$

مثال 7 ضع فى أبسط صورة كلًّا من الأعداد الآتية:

1 $\sqrt[3]{32}$ 2 $\sqrt[3]{\frac{-250}{8}}$ 3 $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

الحل

1 حلل العدد 32 إلى عاملين أحدهما 8 وهو أكبر عامل مكعب كامل ($32 = 8 \times 4$)

$$\therefore \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$$

2 $$\sqrt[3]{\frac{-250}{8}} = \sqrt[3]{\frac{-125 \times 2}{8}} = \sqrt[3]{\frac{-125}{8}} \times \sqrt[3]{2} = \frac{-5}{2}\sqrt[3]{2}$$

3 $$2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 2\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{48}}{4} = \frac{2\sqrt[3]{8 \times 6}}{4} = \frac{2 \times 2\sqrt[3]{6}}{4} = \sqrt[3]{6}$$

حل آخر لفقرة (3):

$$\because 2 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$$

$$\therefore 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6}$$

مثال 8 اختصر كلًّا مما يأتى إلى أبسط صورة:

1 $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$ 2 $\frac{\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{81}}$ 3 $\sqrt[3]{108} - 6\sqrt[3]{-32} - 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

الحل

1 $$2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} = 2\sqrt[3]{8 \times 2} - \sqrt[3]{27 \times 2} - \sqrt[3]{64 \times 2}$$
$$= 2 \times 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2}$$
$$= 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$$

2 $$\frac{\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{125 \times 3} - \sqrt[3]{8 \times 3}}{\sqrt[3]{27 \times 3}} = \frac{5\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} = 1$$

3 $$\sqrt[3]{108} - 6\sqrt[3]{-32} - 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{27 \times 4} + 6\sqrt[3]{8 \times 4} - 4\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$
$$= 3\sqrt[3]{4} + 6 \times 2\sqrt[3]{4} - \frac{4}{2}\sqrt[3]{2 \times 2}$$
$$= 3\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} = 13\sqrt[3]{4}$$

س؟ سؤال 5

1 ضع فى أبسط صورة كلًّا من الأعداد الآتية:

(أ) $\sqrt[3]{24}$ (ب) $2\sqrt[3]{16}$ (جـ) $3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$

2 اختصر كلًّا مما يأتى إلى أبسط صورة:

(أ) $\frac{\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$ (ب) $\sqrt[3]{72} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{(-3)^2}$ (جـ) $-2\sqrt[3]{4}\,(3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{128})$

مثـال 9 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} =$ .... $\left(\sqrt[3]{14} ، \sqrt[3]{2} ، 8 ، \sqrt[3]{18}\right)$

2 أى مما يأتى يكافئ $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}$ ؟ .... $\left(27 ، 3\sqrt[3]{3} ، 3 ، \sqrt[3]{12}\right)$

3 إذا كان $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{3} = a\sqrt[3]{2}$ ، فما قيمة a؟ .... $\left(30 ، \sqrt[3]{30} ، 15 ، \sqrt[3]{15}\right)$

الحـل

1 $\sqrt[3]{2}$ (لأن: $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8\times 2} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$ ◄)

2 3 (لأن: $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3\times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$ ◄)

3 $\sqrt[3]{15}$ (لأن: $a = \frac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{30}{2}} = \sqrt[3]{15}$ ◄)

مثـال 10 إذا كانت: $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

فأوجد قيمة كل من: 1 $(x+y)^3$ 2 $(x-y)^3$

الحـل

1 $(x+y)^3 = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 = (2\sqrt[3]{3})^3 = (2)^3(\sqrt[3]{3})^3$

$= 8 \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = 8 \times \sqrt[3]{3\times3\times3} = 8 \times \sqrt[3]{27} = 8 \times 3 = 24$

2 $(x-y)^3 = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}))^3 = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^3$

$= (2\times\sqrt[3]{2})^3 = (2)^3(\sqrt[3]{2})^3 = 8\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2} = 8\times\sqrt[3]{2\times2\times2} = 8\times\sqrt[3]{8} = 8\times2 = 16$

مثـال 11

متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{3}$ ، $\sqrt[3]{4}$ من السنتيمترات، أوجد حجمه.

الحـل

∵ حجم متوازى المستطيلات يساوى حاصل ضرب أبعاده الثلاثة

∴ حجم متوازى المستطيلات يساوى $2\sqrt[3]{3}$ سم^3

(لأن: $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2\times3\times4} = \sqrt[3]{8\times3} = 2\sqrt[3]{3}$ ◄)

س؟ سؤال 6

1 اختر الإجابة الصحيحة:

(أ) $\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{-6} =$ .... $\left(\sqrt[3]{6} ، 2\sqrt[3]{6} ، 3\sqrt[3]{6} ، -\sqrt[3]{6}\right)$

(ب) $\sqrt{9} + \sqrt[3]{-27} =$ .... $(3 ، 0 ، 2 ، -2)$

(جـ) إذا كان: $\sqrt[3]{24} - 4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{x}$ ، فما قيمة x ؟ .... $(3 ، 4 ، 24 ، 42)$

2 إذا كان $y = \sqrt[3]{3} + 1$, $x = \sqrt[3]{3} - 1$ فأوجد قيمة كلٍّ من: (أ) $(x+y)^3$ (ب) $(x-y)^3$

3 مكعب حجمه 2000سم^3 أوجد مساحته الكلية.

تدرّب

الدرس 4

قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية (Laws Of Square and Cube Roots)

▲ تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً: الجذور التربيعية:

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 أي مما يلي صحيح؟ ....

(أ) $\sqrt{90} = 9\sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{20} = 5\sqrt{2}$ (جـ) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{48} = 3\sqrt{6}$

2 ما قيمة: $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ ؟ ....

(أ) 1 (ب) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 ما قيمة: $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ ؟ ....

(أ) $\sqrt{6}$ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) 2 (د) 1

4 $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{2} =$ ....

(أ) $\sqrt{30}$ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) 2 (د) $2\sqrt{2}$

5 أي مما يلي يُكافئ: $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ؟ ....

(أ) $2\sqrt{6}$ (ب) $6\sqrt{2}$ (جـ) 6 (د) $\sqrt{70}$

6 أي مما يلي يُكافئ: $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{18}}$ ؟ ....

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7 إذا كان: $x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ ، فما قيمة x^{-1} ؟ ....

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8 $\sqrt{30} \times \sqrt{40} =$ ....

(أ) $\sqrt{120}$ (ب) $100\sqrt{12}$ (جـ) $20\sqrt{3}$ (د) $4\sqrt{30}$

9 إذا كان: $\sqrt{90} = x\sqrt{10}$ ، فما قيمة x ؟ ....

(أ) 9 (ب) 20 (جـ) 3 (د) 30

10 إذا كان: $\frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$ فإن: .... $= x$

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6}$ (جـ) 2 (د) 9

11 أي مما يلي يُكافئ: $\frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ ؟ ....

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (جـ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (د) $3\sqrt{3}$

12 إذا كان: $x + \sqrt{45} = 2\sqrt{5}$ ، فما قيمة x؟ ....

(أ) $\sqrt{15}$ (ب) $-\sqrt{15}$ (جـ) $\sqrt{5}$ (د) $-\sqrt{5}$

13 إذا كان: $x = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ ، $y = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ، فما قيمة $xy - 1$؟ ....

(أ) 5 (ب) 0 (جـ) -4 (د) 7

2 اختصر كلًّا مما يأتى إلى أبسط صورة :

1 $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ 2 $3\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$ 3 $5\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{12}\right)$

4 $\frac{4}{\sqrt{2}}-2\sqrt{18}+\sqrt{32}$ 5 $2\sqrt{5}+6\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{12}-5\sqrt{\frac{1}{5}}$

6 $4\sqrt{48}+\frac{4}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}$ 7 $\frac{4}{\sqrt{2}}-2\sqrt{18}+\sqrt{32}$

3 أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان: $x\sqrt{27}=3\sqrt{75}+\sqrt{108}$ ، فأوجد قيمة x

2 إذا كان: $2\sqrt{24}=b\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{5}=2\sqrt{a}$ ، فأوجد قيمة $a+b$

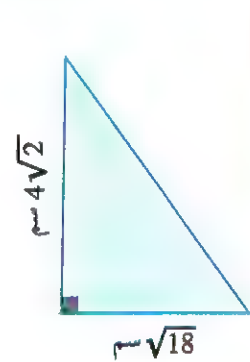
3 إذا كان: $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ، $y=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ ، فأوجد قيمة $15\,(x+y)$

4 إذا كان: $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ، فأوجد فى أبسط صورة كلًّا مما يأتى:

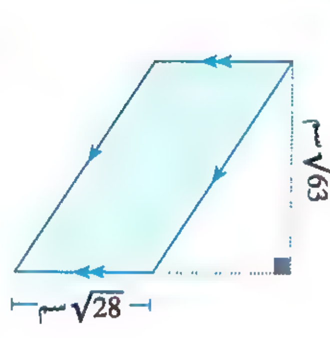
(أ) $x\times y$ (ب) $\frac{x}{y}$ (جـ) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

4 احسب مساحة كل من الأشكال المُظللة الآتية:

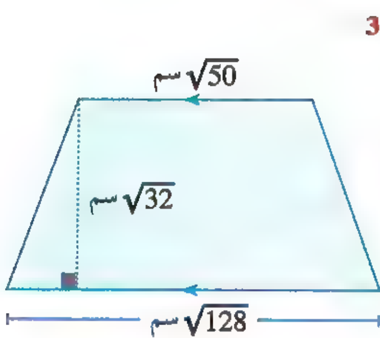
1



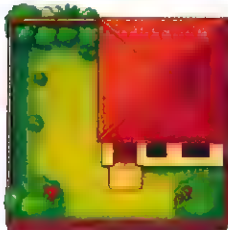
2



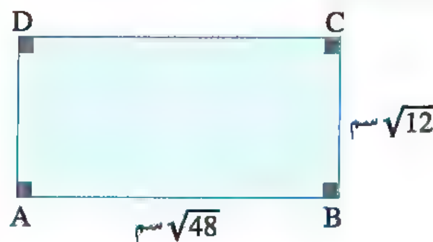
3



5 بناء: قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها 500 م^2 ، أُستخدمت منها قطعة مربعة الشكل مساحتها 180 م^2 فى بناء منزل، وتُركت باقى المساحة كحديقة كما بالشكل، فما طول السور الخارجى للحديقة بالمتر؟



6 هندسة : إذا كانت مساحة المستطيل A B C D تساوى مساحة المربع E F G H فما طول $\overline{EF}$ ؟





ثانيًا: الجذور التكعيبية:

7 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 أي مما يلي يُكافئ: $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ ؟ ....

(أ) -2 (ب) 2 (جـ) $2\sqrt[3]{2}$ (د) 8

2 $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} =$ ....

(أ) $\sqrt[3]{2}$ (ب) $\sqrt[3]{6}$ (جـ) $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ (د) $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

3 $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} =$ ....

(أ) $\sqrt[3]{2}$ (ب) $\sqrt[3]{4}$ (جـ) $\sqrt[3]{8}$ (د) $\sqrt[3]{16}$

4 أي مما يلي يُكافئ: $\frac{\sqrt[3]{-81}}{\sqrt[3]{3}}$ ؟ ...

(أ) -3 (ب) $\sqrt[3]{9}$ (جـ) $3\sqrt[3]{27}$ (د) 3

5 $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{9}{4}} =$ ....

(أ) $\sqrt[3]{\frac{18}{12}}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{9}{4}$

6 $\frac{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}} =$ ....

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

7 أي مما يلي يُكافئ: $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{-12}$ ؟ ....

(أ) $\sqrt[3]{-2}$ (ب) $\sqrt[3]{3}$ (جـ) -4 (د) -2

8 أي مما يلي يُكافئ: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$ ؟

(أ) $\sqrt[3]{30}$ (ب) 5 (جـ) $5\sqrt[3]{5}$ (د) 125

9 $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-2} =$ ....

(أ) $\sqrt[3]{52}$ (ب) $\sqrt[3]{2}$ (جـ) $2\sqrt[3]{2}$ (د) $4\sqrt[3]{2}$

10 ما ناتج: $\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ؟ ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 2

11 ما ناتج: $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt[3]{0.125}$ ؟ ....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 0 (د) $\frac{7}{2}$

8 اختصر كلًّا مما يأتي إلى أبسط صورة:

1 $\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$

2 $\frac{2\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{10}}$

3 $\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{16}\div(\sqrt[3]{4}\times 6)$

4 $\sqrt[3]{192}-3\sqrt[3]{375}+2\sqrt[3]{24}$

5 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{256}+\frac{12}{\sqrt[3]{16}}+\sqrt[3]{32}$

6 $2\sqrt[3]{4}\left(5\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{32}\right)$

7 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

8 $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}$

9 $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

10 $2\sqrt[3]{16}\left(3\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

9 أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان: $x\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{270}$ ، فأوجد قيمة x

2 أثبت أن: $\sqrt[3]{-27}+\sqrt{9}+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=2$

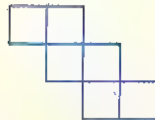
3 إذا كان: $a=\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$ ، $b=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$ فأوجد في أبسط صورة كلًّا مما يأتي:

(أ) $(a+b)^3$ (ب) $a\times b$ (جـ) a^2-b^2

تفكير إبداعي TIMSS

10 **هندسة:** كل شكل من الشكلين المقابلين يتكون من مربعات متساوية في المساحة.

أوجد محيط كل شكل (مساحة الشكل معطاة أسفله).

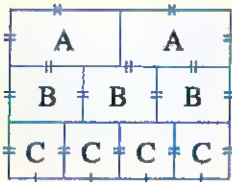

المساحة = 300 سنتيمتر مربع


المساحة = 132 سنتيمترًا مربعًا

11 إذا كان: $x^a=6$ ، $x^{-b}=\sqrt{3}$ **فأوجد** قيمة: x^{a+b}

12 إذا كان: $x^{-1}=\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{3}-3}$ **فأوجد** قيمة: $x+\sqrt[3]{9}$

13 مربع مساحته 432 سم² قُسم إلى مُستطيلات ومربعات كما بالشكل، فما هو الفرق بين محيطي الشكلين A ، B ؟



1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 ما قيمة: $\sqrt{5}+\sqrt{5}$ ؟ ....

(أ) $\sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{20}$ (جـ) 5 (د) 10

2 ما قيمة: $\sqrt[3]{-64}+\sqrt{16}$ ؟ ....

(أ) 0 (ب) 8 (جـ) -8 (د) ± 8

3 العدد التالى فى النمط: .... , $\sqrt{48}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{3}$ هو ....

(أ) $\sqrt{50}$ (ب) $\sqrt{75}$ (جـ) $\sqrt{60}$ (د) $\sqrt{90}$

4 إذا كان: $a=2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$، فما قيمة a ؟ ....

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 0

5 أى من الأعداد الآتية هو عدد غير نسبى محصور بين العددين 3 , 4 ؟ ....

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt{10}$ (جـ) $\sqrt{25}$ (د) $\sqrt[3]{27}$

6 ما المعكوس الضربى للعدد $3-\sqrt{10}$ ؟ ....

(أ) $\sqrt{10}-3$ (ب) $-\sqrt{10}-3$ (جـ) $\sqrt{10}+3$ (د) $3-\sqrt{10}$

7 إذا كان: $x=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ ، $y=\sqrt{28}+\sqrt{12}$ ، فإن: y .... $=x$

(أ) 1 (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) 2 (د) 4

8 $[-3,-1]\cap]-1,3]=$ ....

(أ) $\{-3\}$ (ب) $\{-1\}$ (جـ) $\{1\}$ (د) $\varnothing$

2 أجب عما يأتى:

1 اختصر كلًّا مما يأتى إلى أبسط صورة:

(أ) $3\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$

(ب) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

(جـ) $5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{200}+\left(\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}\right)$

(د) $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$

2 رتب تصاعديًّا الأعداد: $2\sqrt{3}$ ، $3.\overline{5}$ ، $3\frac{1}{2}$

3 إذا كانت: $x=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ ، فأوجد فى أبسط صورة: $x-\frac{1}{x}$

4 إذا كانت: $X=[2,\infty[$, $Y=]-2,3[$ ، فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى:

(أ) $X\cap Y$ (ب) $X\cup Y$ (جـ) $X-Y$ (د) Y'

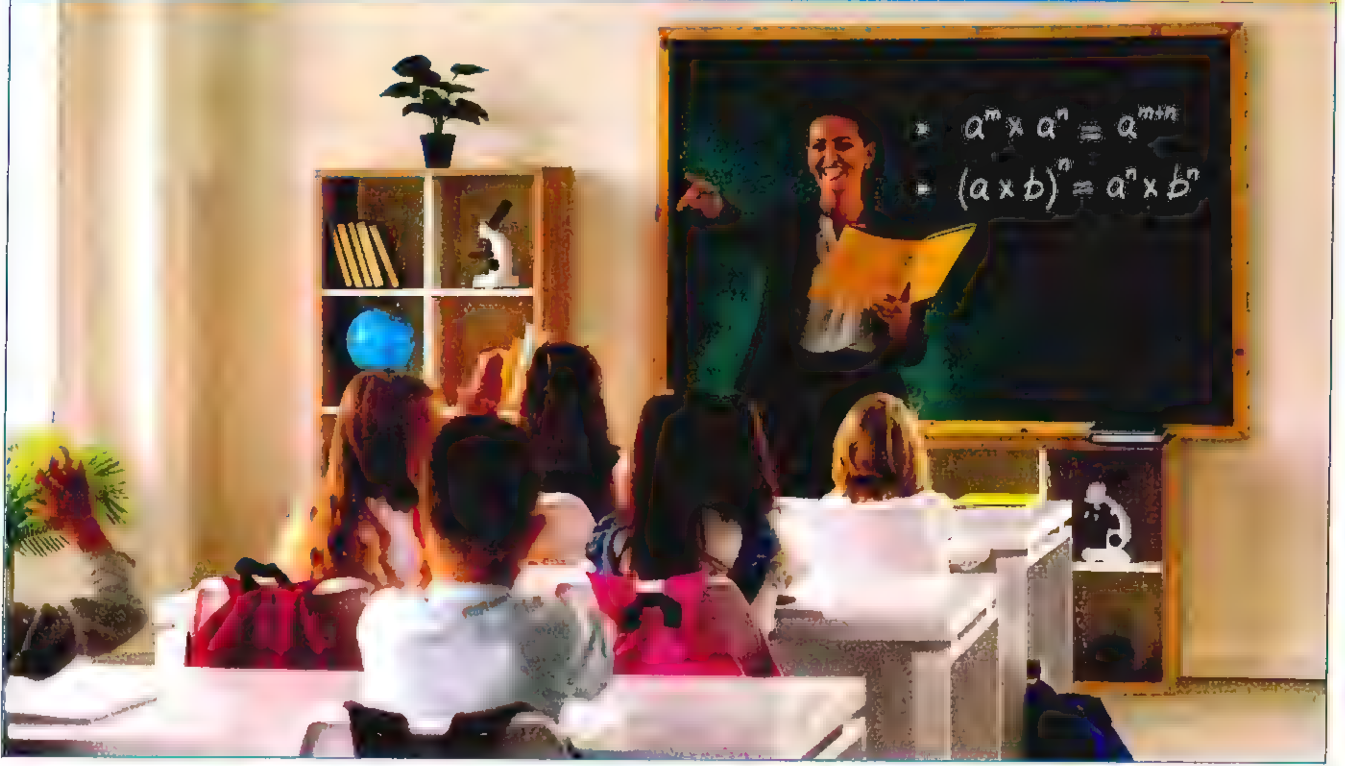
5 إذا كان: $x=3+\sqrt[3]{6}$ ، $y=3-\sqrt[3]{6}$ فأوجد قيمة: $\frac{x-y}{x+y}$

6 إذا كان: $x\sqrt{32}=2\sqrt{50}+\sqrt{72}$ ، فأوجد قيمة: x

ذاكر

الدرس 5

قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية
(Laws of Exponents in Real Numbers)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب على الضرب المتكرر فى مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يتعرف الطالب على قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية.
- يستخدم الطالب قوانين الأسس فى تبسيط تعبيرات رياضية.
- يستخدم الطالب قوانين الأسس فى حل التمارين.

مفردات أساسية

- الضرب المتكرر **(Repeated Multiplication)**
- أس **(Exponent)**
- أساس **(Base)**
- قوة **(Power)**

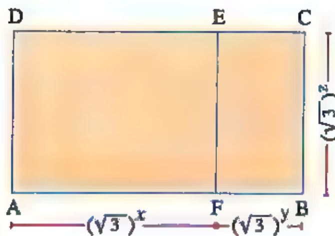
فكر وناقش

- فى الشكل المقابل:

ABCD مستطيل، فما مساحته إذا علمت أن:

$x + Z = 4$ ، $y + Z = 2$

فما القيمة العددية للمساحة عندئذ؟



- وفى هذا الدرس سوف نتعرف على قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم 1 الضرب المتكرر فى مجموعة الأعداد الحقيقية

- يستخدم التعبير الرياضى a^n للتعبير عن حاصل ضرب العدد الحقيقى a فى نفسه n من المرات حيث n عدد صحيح موجب.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots\dots\dots \times a}_{\text{عدد حقيقى مكرر n من المرات}} = a^n$$

الأس «يوضح عدد مرات استخدام الأساس كعامل»

الأساس «العامل المتكرر بالضرب»

فمثلًا:

- $\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$
- $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^4$
- $\sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = (\sqrt{7})^5$

مثال 1 أوجد قيمة كل مما يأتى:

1 $(-\sqrt{2})^5$ 2 $-(\sqrt{3})^5$ 3 $(-\sqrt{5})^6$

الحل

1
$$(-\sqrt{2})^5 = \underbrace{-\sqrt{2} \times -\sqrt{2}} \times \underbrace{-\sqrt{2} \times -\sqrt{2}} \times -\sqrt{2}$$
$$= 2 \times 2 \times -\sqrt{2}$$
$$= 4 \times -\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

2
$$-(\sqrt{3})^5 = -(\underbrace{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times \underbrace{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times \sqrt{3})$$
$$-(3 \times 3 \times \sqrt{3}) = -(9\sqrt{3}) = -9\sqrt{3}$$

3
$$(-\sqrt{5})^6 = \underbrace{-\sqrt{5} \times -\sqrt{5}} \times \underbrace{-\sqrt{5} \times -\sqrt{5}} \times \underbrace{-\sqrt{5} \times -\sqrt{5}}$$
$$= 5 \times 5 \times 5 = 125$$

لاحظ أن

- $(-a)^n = a^n$ إذا كان n عددًا صحيحًا زوجيًا

فمثلًا:

- $(-\sqrt{5})^4 = (\sqrt{5})^4 = 25$
- $(-\sqrt{7})^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$

- $(-a)^n = -a^n$ إذا كان n عددًا صحيحًا فرديًا

فمثلًا:

- $(-\sqrt{5})^3 = -(\sqrt{5})^3 = -5\sqrt{5}$
- $(-\sqrt{3})^5 = -(\sqrt{3})^5 = -9\sqrt{3}$

سؤال 1

أوجد قيمة كل مما يأتى:

1 $(-\sqrt{10})^2$ 2 $(-\sqrt{5})^3$ 3 $(-\sqrt{2})^4$ 4 $-(\sqrt{3})^6$

الأس الصفرى والأس السالب:

1 الأس الصفرى: أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر مرفوع للأس صفر يساوى 1

أى أن: لأى a عدد حقيقى لا يساوى الصفر يكون: $a^0 = 1$

فمثلًا: $(-\sqrt{7})^0 = 1$ ، $(\sqrt{23})^0 = 1$ ، $3^0 = 1$

2 الأس السالب: أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر مرفوع للأس (n−) حيث n عدد صحيح يساوى المعكوس الضربى للعدد نفسه مرفوع للأس n

أى أن: لأى a عدد حقيقى لا يساوى الصفر يكون: $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$

فمثلًا: $(\sqrt{2})^{-4} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4}$

$(\sqrt{7})^{-1} = (\frac{1}{\sqrt{7}})^1 = \frac{1}{\sqrt{7}}$

$(\frac{3}{\sqrt{3}})^{-2} = (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

لاحظ أن

- القسمة على الصفر ليس لها معنى وعلى هذا عند وجود رموز فى المقام يشترط لهذه الرموز ألا تساوى صفرًا.
- $a^{-n} \times a^n = 1$ فمثلًا: $(\sqrt{5})^{-3} \times (\sqrt{5})^3 = 1$
- المعكوس الضربي للعدد a^{-n} هو a^n والعكس صحيح.

مثال 2 أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $(\frac{3}{\sqrt{5}})^0 - \frac{3}{(\sqrt{5})^0}$ 2 $(\frac{\sqrt{3}}{6})^{-1}$

الحل

1 $(\frac{3}{\sqrt{5}})^0 - \frac{3}{(\sqrt{5})^0} = 1 - \frac{3}{1} = 1 - 3 = -2$

2 $(\frac{\sqrt{3}}{6})^{-1} = (\frac{6}{\sqrt{3}})^1 = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

تعلم 2 قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية:

أولا قوانين الضرب:

1 عند ضرب القوى التى لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونجمع الأسس:

لأى a عدد حقيقى لا يساوى الصفر ، m ، n عددان صحيحان يكون: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

فمثلًا: $a^{-2} \times a^3 = a^{-2+3} = a$ ، $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$

$(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^{3+1} = (\sqrt{2})^4 = 4$

2 عند إيجاد قوة حاصل ضرب عددين يوزع الأس على كل من العددين

لأى عددين حقيقيين a ، b لا يساويان الصفر، n عدد صحيح يكون: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

فمثلًا: $(2\sqrt{3})^2 = (2)^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

مثال 3

إذا كان: $(\sqrt{5})^x \times (\sqrt{5}) = 1$ فما قيمة x

الحل

$\because (\sqrt{5})^x \times (\sqrt{5}) = 1$

$\therefore (\sqrt{5})^x = \frac{1}{\sqrt{5}} = (\sqrt{5})^{-1}$ $\quad \therefore x = -1$

تذكر أن

- $(a+b)^n \neq a^n + b^n$
- $(a-b)^n \neq a^n - b^n$

ثانيًا قوانين القسمة:

1 عند قسمة القوى التي لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونطرح الأسس :

أي أن:

لأي a عدد حقيقي لا يساوي الصفر ، m ، n عددان صحيحان يكون: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

فمثلًا: $(x \neq 0)$ ، $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ ، $\frac{(\sqrt[3]{5})^7}{(\sqrt[3]{5})^4} = (\sqrt[3]{5})^{7-4} = (\sqrt[3]{5})^3 = 5$

2 عند إيجاد قوة خارج قسمة عددين يوزع الأس على العددين.

أي أن:

لأي a ، b عددان حقيقيان لا يساويان الصفر ، n عدد صحيح يكون: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

فمثلًا: $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$ ، $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{5}$

مثال 4

إذا كانت: $x = 4\sqrt{3}$ ، $y = 2\sqrt{3}$ فما قيمة: $\frac{y^5}{x^3}$

الحل

$$\frac{y^5}{x^3} = \frac{(2\sqrt{3})^5}{(4\sqrt{3})^3} = \frac{2^5 \times (\sqrt{3})^5}{4^3 \times (\sqrt{3})^3} = \frac{32}{64} \times (\sqrt{3})^{5-3} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}$$

مثال 5 اختصر لأبسط صورة كلًّا مما يأتي:

1 $\frac{(\sqrt{12})^6 \times (\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^5}$ 2 $\frac{(-\sqrt{5}\,a\,b)^4}{5\,a^4\,b^3}$ 3 $\frac{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-1}}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^{-2}}$

الحل

1 $$\frac{(\sqrt{12})^6 \times (\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^5} = \frac{(2\sqrt{3})^6 \times (\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^5} = \frac{2^6 \times (\sqrt{3})^6 \times (\sqrt{3})^3}{2^5 \times (\sqrt{3})^5}$$

$$= 2^{6-5} \times (\sqrt{3})^{6+3-5} = 2 \times (\sqrt{3})^4 = 2 \times 9 = 18$$

2 $$\frac{(-\sqrt{5}\,a\,b)^4}{5\,a^4\,b^3} = \frac{(-\sqrt{5})^4\,a^4\,b^4}{5\,a^4\,b^3} = \frac{25}{5} \times a^{4-4} \times b^{4-3}$$

$$= 5 \times a^0 \times b = 5 \times 1 \times b = 5b$$

3 $$\frac{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-1}}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^{-2}} = (\sqrt{3})^{2+4-1-5+2} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

مثال 6 اختصر لأبسط صورة كلًا مما يأتي:

1 $(\sqrt{10})^n \times (\sqrt{5})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 1$

2 $\frac{2^{n+1} \times 3^{n+1}}{6^n}$

3 $\frac{(\sqrt{5})^n \times (\sqrt{3})^{2-n}}{3 \times (\sqrt{15})^{-n}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = -2$

4 $\frac{1000 \times 0.1^n \times 10^{n-1}}{10^{n+2}}$

الحل

1 $(\sqrt{10})^n \times (\sqrt{5})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n} = \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\right)^n \times (\sqrt{5})^{n-1} = \left(\sqrt{\frac{10}{2}}\right)^n \times (\sqrt{5})^{n-1} = (\sqrt{5})^n \times (\sqrt{5})^{n-1}$

$= (\sqrt{5})^{n+n-1} = (\sqrt{5})^{2n-1}$

عندما $n=1$ ∴ قيمة الناتج:

$(\sqrt{5})^{2\times1-1} = (\sqrt{5})$

2 $\frac{2^{n+1} \times 3^{n+1}}{6^n} = \frac{(2 \times 3)^{n+1}}{6^n} = \frac{6^{n+1}}{6^n} = \frac{6^n \times 6^1}{6^n} = 6$

3 $\frac{(\sqrt{5})^n \times (\sqrt{3})^{2-n}}{3 \times (\sqrt{15})^{-n}} = \frac{(\sqrt{5})^n \times (\sqrt{3})^{2-n}}{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5} \times \sqrt{3})^{-n}}$

$= \frac{(\sqrt{5})^n \times (\sqrt{3})^{2-n}}{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^{-n} \times (\sqrt{3})^{-n}}$

$= (\sqrt{5})^{n+n} \times (\sqrt{3})^{2-n-2+n} = (\sqrt{5})^{2n} \times (\sqrt{3})^0$

$= (\sqrt{5})^{2n} \times 1 = (\sqrt{5})^{2n}$

عندما $n=-2$ ∴ قيمة الناتج:

$(\sqrt{5})^{2\times-2} = (\sqrt{5})^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^4 = \frac{1}{25}$

4 $\frac{1000 \times 0.1^n \times 10^{n-1}}{10^{n+2}} = \frac{10^3 \times 10^{-n} \times 10^{n-1}}{10^{n+2}} = 10^{3-n+n-1-n-2}$

$= 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

لاحظ أن

- $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$
- $0.01 = 10^{-2}$
- $0.001 = 10^{-3}$

- $10 = 10^1$
- $100 = 10^2$
- $1000 = 10^3$

مثال 7 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كان : $2^{x-2} = 1$ ، فإن قيمة x تساوي ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

2 إذا كان : $2^x = 5$ ، فما قيمة 2^{x+1} ؟ ....

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 64

3 إذا كان : $3^x = 15$ ، فما قيمة 3^{x-1} ؟ ....

(أ) 0 (ب) 5 (جـ) 10 (د) 15

4 إذا كان : $(\sqrt{5})^{x-1} = \sqrt{6}$ ، فما قيمة $(\sqrt{5})^x$ ؟ ....

(أ) $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ (ب) $\frac{1}{3}\sqrt{30}$ (جـ) $\sqrt{30}$ (د) $\frac{1}{6}\sqrt{30}$

5 .... $= 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$

(أ) 5^{10} (ب) 25^2 (جـ) 25^{10} (د) 5^3

6 ما هو $\frac{1}{6}$ العدد: $(\sqrt[3]{6})^6$ ؟ ....

(أ) 6 (ب) $\frac{1}{216}$ (جـ) $(\sqrt[3]{6})^2$ (د) $(\sqrt[3]{6})^7$

الحل

1 $2^{x-2} = 1$ $\quad \because (2)^0 = 1$

$\therefore 2^{x-2} = 2^0$ $\quad \therefore x - 2 = 0$ $\quad \therefore x = 2$

2 $\therefore 2^{x+1} = 2^x \times 2^1 = 5 \times 2 = 10$

3 $\therefore 3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1} = \frac{15}{3} = 5$

4 $\therefore (\sqrt{5})^{x-1} = \sqrt{6}$ $\quad \therefore \frac{(\sqrt{5})^x}{(\sqrt{5})^1} = \sqrt{6}$

$\therefore (\sqrt{5})^x = \sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$

5 $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 5^2 \times 5 = 5^{2+1} = 5^3$

6 $\frac{1}{6} \times (\sqrt[3]{6})^6 = \frac{1}{6} \times \underbrace{\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6}} \times \underbrace{\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6}}$

$= \frac{1}{\cancel{6}} \times \cancel{6} \times 6 = 6$

س؟ سؤال 2

1 اختر الإجابة الصحيحة:

(أ) .... $= 3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1}$ $\quad$ (1 ، 2 ، 3 ، 9^{-1})

(ب) إذا كان: $\sqrt{2}^{\,x} \times \sqrt{2} = 1$ ، فإن $x =$ .... $\quad$ (-2 ، -1 ، 0 ، 2)

2 أوجد قيمة ما يلي: (أ) $(\sqrt{5})^6 \times (\sqrt{5})^{-4}$ (ب) ما $\frac{1}{4}$ العدد $(\sqrt[3]{8})^5$ ؟

3 اختصر لأبسط صورة كلًا مما يأتي: (أ) $\frac{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^{-7}}{(\sqrt{3})^{-2}}$ (ب) $\frac{0.001}{(10)^{-2} \times 10^{-3}}$

مثال 8

فى الشكل المقابل:

مربع طول ضلعه 5^x سم

ومستطيل بعداه 5^{x+1} سم ، 5 سم

إذا كان محيط المربع = 24 سم

فأوجد مساحة المستطيل.

الحل

∴ محيط المربع = 24 سم

$$\therefore\ 4 \times 5^x = 24$$

$$\therefore\ 5^x = \frac{24}{4} = 6$$

∴ مساحة المستطيل A = الطول × العرض

$$\therefore\ A = 5^{x+1} \times 5 = 5^x \times 5 \times 5 = 6 \times 25 = 150$$

∴ مساحة المستطيل = 150 سم^2

مثال 9

صنع نجار صندوقًا خشبيًا على شكل متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $2\sqrt{5}$ م وارتفاعه $3\sqrt{5}$ م.

أوجد حجم الصندوق.

الحل

حجم الصندوق (متوازى المستطيلات) = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\therefore\ 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 12 \times 5 \times \sqrt{5} = 60\sqrt{5}$$

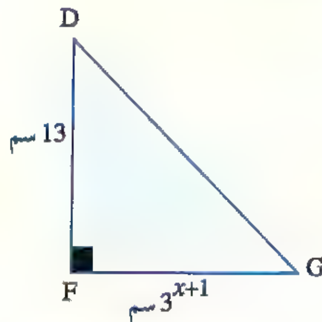
∴ حجم الصندوق = $60\sqrt{5}$ م^3

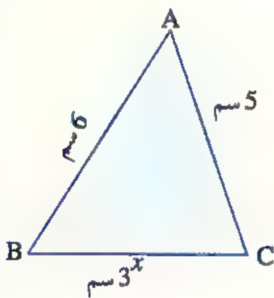
سؤال 3

1 فى الشكل المقابل:

إذا كان محيط المثلث ABC = 15سم

فاحسب مساحة المثلث DFG





2 متوازى مستطيلات أبعاده : $3\sqrt{11}$ سم ، $5\sqrt{11}$ سم ، $\sqrt{11}$ سم ، احسب حجمه.

3 مكعب طول حرفه $3\sqrt{2}$ سم، أوجد:

(أ) حجمه. (ب) مساحته الكلية.

أسئلة الكتاب المدرسى

الضرب المتكرر فى مجموعة الأعداد الحقيقية:

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=(\sqrt{3})^{\cdots\cdots}$

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

2 $(\sqrt{7})^2=$ ....

(أ) $\sqrt{7}$ (ب) $7\sqrt{7}$ (جـ) $2\sqrt{7}$ (د) 7

3 $(-\sqrt{5})^4=$ ....

(أ) -25 (ب) -625 (جـ) 25 (د) 625

4 $-(\sqrt{2})^6=$ ....

(أ) -64 (ب) -8 (جـ) 64 (د) 8

5 $-(\sqrt{3})^5=$ ....

(أ) -243 (ب) $9\sqrt{3}$ (جـ) $-9\sqrt{3}$ (د) $-5\sqrt{3}$

6 $(-\sqrt[3]{5})^0=$ ....

(أ) 0 (ب) -1 (جـ) 1 (د) $-\sqrt[3]{5}$

7 $9a^0=$ .... (حيث $a\neq 0$)

(أ) 1 (ب) 9 (جـ) 0 (د) a

8 إذا كان: $2^{x-1}=1$ فما قيمة x ؟ ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) -2

9 إذا كان: $(x-7)^0=1$ فإن: $x\in$ ....

(أ) $R-\{7\}$ (ب) $R-\{-7\}$ (جـ) $\{7\}$ (د) $\{-7\}$

10 المعكوس الجمعى للعدد $(-\sqrt{5})^0$ هو ....

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $-\sqrt{5}$ (جـ) 1 (د) -1

11 ما قيمة: $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^0-\frac{7}{(\sqrt{7})^0}$ ؟ ....

(أ) 0 (ب) 6 (جـ) 1 (د) -6

12 $(\sqrt{3})^{-1}=$ ....

(أ) $-\sqrt{3}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) $\sqrt{3}$ (د) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

13 $\frac{2}{(\sqrt[3]{5})^{-3}}=$ ....

(أ) $\frac{(\sqrt[3]{5})^3}{2}$ (ب) $-2(\sqrt[3]{5})^3$ (جـ) 10 (د) -10

14 ناتج $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-1}$ هو ....

(أ) $2\sqrt{5}$ (ب) $5\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ (د) 2

15 المعكوس الضربى للعدد: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^{-1}$ هو ....

(أ) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (ب) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (جـ) $\frac{-2\sqrt{6}}{3}$ (د) 1

16 إذا كان: $a = \frac{3}{4}$ ، $b = -2$ فإن: $a^b =$ ....

(أ) $\frac{9}{16}$ (ب) $\frac{16}{9}$ (جـ) $\frac{-9}{16}$ (د) $\frac{-16}{9}$

2 أوجد فى أبسط صورة:

1 $(\sqrt{2})^6$ 2 $(\sqrt{5})^3$ 3 $(-\sqrt{7})^4$

4 $(-\sqrt{6})^5$ 5 $(-\sqrt[3]{7})^3$ 6 $(-2\sqrt[3]{5})^0$

7 $-6(\sqrt{3})^0$ 8 $\frac{3}{(\sqrt{5})^0}-\left(\frac{\sqrt{8}}{9}\right)^0$ 9 $(-\sqrt{5})^{-2}$

10 $(-\sqrt[3]{10})^{-3}$ 11 $-2(\sqrt{6})^{-4}$ 12 $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}$

قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية:

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $3^2 \times 3 =$ ....

(أ) 3^2 (ب) 9^2 (جـ) 3^3 (د) 9^3

2 $(\sqrt[3]{7})^7 \div (\sqrt[3]{7})^4 =$ ....

(أ) $(\sqrt[3]{7})^{11}$ (ب) 7^3 (جـ) $(\sqrt[3]{7})$ (د) 7

3 ما ناتج $(\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^{-4}$ ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (جـ) 3 (د) $\frac{1}{3}$

4 $(-2\sqrt{3})^2 =$ ....

(أ) $4\sqrt{3}$ (ب) 12 (جـ) $-4\sqrt{3}$ (د) -12

5 $\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 =$ ....

(أ) $\frac{16}{\sqrt{2}}$ (ب) 8 (جـ) 4 (د) 2

6 $(\sqrt{3})^{-1} \times \sqrt{3} =$ ....

(أ) $(\sqrt{3})^2$ (ب) 1 (جـ) 0 (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

7 ما قيمة: $4^2+4^2+4^2+4^2$ ؟ ....

(أ) 4^2 (ب) 4^3 (جـ) 4^8 (د) 4^{16}

8 نصف العدد $2^{18}=$ ....

(أ) 2^{9} (ب) 1^{18} (جـ) 2^{17} (د) 2^{36}

9 ما قيمة $\frac{1}{5}$ من العدد $(\sqrt[3]{5})^{6}$ ؟

(أ) 5 (ب) 25 (جـ) $\sqrt[3]{5}$ (د) $(\sqrt[3]{5})^{8}$

10 رُبع العدد $2^{7}=$ ....

(أ) 4^{3} (ب) 4^{4} (جـ) 2^{5} (د) 2^{14}

11 إذا كان: $1=\sqrt{6}\times(\sqrt{6})^{x}$ فما قيمة x ؟ ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) -2

12 $2^{0}\times2^{-1}\times\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=$ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) 2 (د) 4

13 $2^{5}\times3^{5}=$ ....

(أ) 6^{10} (ب) 2^{10} (جـ) 6^{5} (د) 3^{10}

14 $\frac{(\sqrt{5})^{-5}\times(\sqrt{5})^{-4}}{(\sqrt{5})^{-10}}=$ ....

(أ) 5 (ب) $(\sqrt{5})^{-1}$ (جـ) $\sqrt{5}$ (د) -5

15 قيمة المقدار: $(3)^{0}+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{-27}}=$ ....

(أ) 0 (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) 1 (د) 3

16 ما ناتج: $\frac{(a\,b)^{3}}{b^{3}}$ ؟

(أ) a^{3} (ب) $\frac{a}{b}$ (جـ) $\frac{a^{3}}{b^{2}}$ (د) $\frac{a^{2}}{b^{3}}$

17 إذا كانت: $2^{x}=3$ فما قيمة 2^{x+1} ؟ ....

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 9

18 إذا كانت: $5^{x}=4$ فما قيمة 5^{x-1} ؟ ....

(أ) 1.25 (ب) 0.8 (جـ) 0.125 (د) 0.08

19 إذا كان: $\frac{2}{2^{x}}-\frac{1}{2^{x}}=2^{3}$ ، فإن: $x=$ ....

(أ) 2^{3} (ب) -3 (جـ) 3 (د) 2^{x}

20 إذا كان: $\frac{1}{3^{y}}=7$, $3^{x}=5$ ، فإن: $3^{x+y}=$ ....

(أ) 35 (ب) $\frac{5}{7}$ (جـ) $\frac{7}{5}$ (د) 12

4 اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة:

1 $(\sqrt{7})^5 \times (\sqrt{7})^2$ 2 $(-\sqrt{5})^9 \div (\sqrt{5})^5$ 3 $\frac{(\sqrt{5})^3 \times (-\sqrt{5})^6}{(-\sqrt{5})^4 \times (-\sqrt{5})^4}$

4 $\frac{(\sqrt{10})^3 \times (\sqrt{10})^7}{-(\sqrt{10})^6}$ 5 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^4$ 6 $\frac{(4a)^3}{8a}$

7 $\frac{(-\sqrt{2}ab)^4}{2a^5 b^4}$ 8 $\frac{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^2}{(-3\sqrt{3})^2}$

9 $\frac{(\sqrt{3})^3 \times 27}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^4}$ 10 $\frac{(\sqrt{7})^{-3} \times (\sqrt{7})^7}{(\sqrt{7})^6 \times (\sqrt{7})^{-3}}$ 11 $\frac{(\sqrt{5})^5 \times (\sqrt{3})^{-4}}{(\sqrt{5})^7 \times (\sqrt{3})^{-6}}$

12 $\frac{(-2xy)^{-3}}{x^{-4} y^{-3}}$ 13 $\frac{-3a^2 b \times 4a^{-1} b^{-2}}{12(ab)^{-2}}$ 14 $\frac{(2)^{2n+1} \times (3)^{2n+1}}{(6)^{2n}}$

15 $\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5}$ 16 $\frac{(\sqrt{18})^2 \times (\sqrt{2})^{-1}}{(\sqrt{8})^{-1}}$

5 إذا كانت: $x = \sqrt{3}$ ، $y = 3$ ، $z = \sqrt[3]{3}$ فأوجد قيمة: $x^8 y^4 z^6$

6 إذا كانت: $x = 2\sqrt{3}$ ، $y = 3\sqrt{2}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار: $(x^2 - y^2)^{-1}$؟

7 إذا كانت: $x = \sqrt{3}$ ، $y = \sqrt{6}$ فما قيمة: $\frac{y^4 x^{-6}}{x^2}$؟

8 إذا كانت: $2^x = 5$ فأوجد قيمة كل من:

(1) 2^{x+1} (2) 2^{1-x} (3) $2^{x+2} + 2^{x+3}$

9 اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة:

1 $\frac{(\sqrt{6})^{n+2} \times (\sqrt{3})^n}{4 \times (\sqrt{2})^{n-2}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 1$

2 $\frac{10^{-n} \times 0.01}{10^{-n-6} \times 10^n}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 3$

10 صنع نجار صندوقًا خشبيًا على شكل متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $2\sqrt{7}$ قدم، وارتفاعه $3\sqrt{7}$ قدم، فما حجم الصندوق؟



11 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أى مما يأتى يعبر عن الوسط الحسابى للعددين 2^x ، 2^{x+1} حيث $x \in z$ ؟

(أ) 2 (ب) 2^{2x+1} (جـ) $2^{x-1} + 2^x$ (د) $2^{x+1} + 2^x$

2 إذا كان: $2^x + 2^x + 2^x = 3$ فإن $x = $ ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

3 قيمة المقدار: $\frac{(3-\sqrt{5})^3 (3+\sqrt{5})^3}{2^4} = $ ....

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 16 (د) 64

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما تقدير العدد $\sqrt[3]{30}$ لأقرب عدد صحيح؟ ....

(أ) 1	(ب) 2	(جـ) 3	(د) 4

2 إذا كانت $X = [-2 , 5[$ ، فأى مما يلى صحيح؟

(أ) $5 \in X$	(ب) $-2 \notin X$	(جـ) $0 \notin X$	(د) $-1 \in X$

3 ما المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{5}}{10}$ فى أبسط صورة؟

(أ) $\frac{-\sqrt{5}}{10}$	(ب) $2\sqrt{5}$	(جـ) $-2\sqrt{5}$	(د) 1

4 إذا كان $3\sqrt{5} = x - \sqrt{20}$ فإن $x =$ ....

(أ) $-3\sqrt{5}$	(ب) $\sqrt{75}$	(جـ) $-\sqrt{75}$	(د) $\sqrt{125}$

5 إذا كان: $3^{x-1} = 6$ ، فإن: $3^x =$ ....

(أ) 2	(ب) 6	(جـ) 18	(د) 3

6 أى الفترات الآتية ينتمى إليها العدد $-\sqrt{11}$؟

(أ) $[-2 , -1]$	(ب) $[-3 , -2]$	(جـ) $[-4 , -3]$	(د) $[-5 , -4]$

7 إذا كان: $1 = a \times \sqrt{3}$ فإن قيمة $a =$ ....

(أ) 1	(ب) $\sqrt{3}$	(جـ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(د) $-\sqrt{3}$

8 إذا كان: $a = \sqrt{3}$ ، $b = \sqrt{2}$ فإن: $\left(\frac{b}{a}\right)^{-2} =$ ....

(أ) $\frac{3}{2}$	(ب) -3	(جـ) $\frac{2}{3}$	(د) -2

9 إذا كان: $x = \sqrt[3]{5} + 2$ ، $y = \sqrt[3]{5} - 2$ فإن: $(x+y)^3 =$ ....

(أ) 2	(ب) 40	(جـ) 5	(د) 10

2 أجب عما يأتى:

1 أوجد فى Q' مجموعة حل المعادلة: $3(x^2 - 2) = x^2 + 8$

2 إذا كانت $A = [-1 , 5[$ ، $B =]2 , 7[$ فأوجد على صورة فترة $A - B$

3 اختصر لأبسط صورة المقدار: $(5 - 2\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$

4 إذا كانت: $y = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ ، $x = \sqrt{5} - 2$ فأوجد فى أبسط صورة: $(x-y)^2$

5 اختصر لأبسط صورة المقدار: $\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{250}$

6 إذا كانت $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $b = -1$ فأوجد قيمة: $a^{-2} + b^4$

7 إذا كانت $3^x = 7$ فأوجد قيمة كل من: 3^{x+1} ، 3^{x-1}

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كانت $a = 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ فما قيمة a؟

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 0

2 ما الفترة التى تمثل $]-2, 3] \cap R^-$؟

(أ) $]-2, 0[$ (ب) $]-2, 0]$ (جـ) $]-2, 1]$ (د) $]0, 3]$

3 إذا كان: $(\sqrt{2})^{x-1} = \sqrt{3}$ فما قيمة $(\sqrt{2})^x$؟

(أ) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ (ب) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{6}$ (د) $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

4 أى من الأعداد الآتية عدد غير نسبى؟

(أ) $\sqrt[3]{-27}$ (ب) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ (جـ) $0.\overline{5}$ (د) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$

---

2 أكمل ما يأتى:

1 مجموعة الحل للمعادلة $\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$ فى R هى ....

2 إذا كان n عددًا صحيحًا، $n + 1 > \sqrt{29} > n$ فإن n = ...

3 المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{10} - 3$ فى أبسط صورة يساوى ....

4 إذا كانت: $X =]-1, \infty[$ فإن الفترة التى تعبر عن مكملة X تساوى ....

---

3 أجب عما يأتى:



1 اختصر لأبسط صورة المقدار: $\frac{(\sqrt{15})^{n-2} \times (\sqrt{6})^n}{2 \times (\sqrt{10})^{n-2}}$ ،
ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند n = 1

2 إذا كانت $x = \sqrt{7} - \sqrt{6}$

فأوجد فى أبسط صورة $x - \frac{1}{x}$

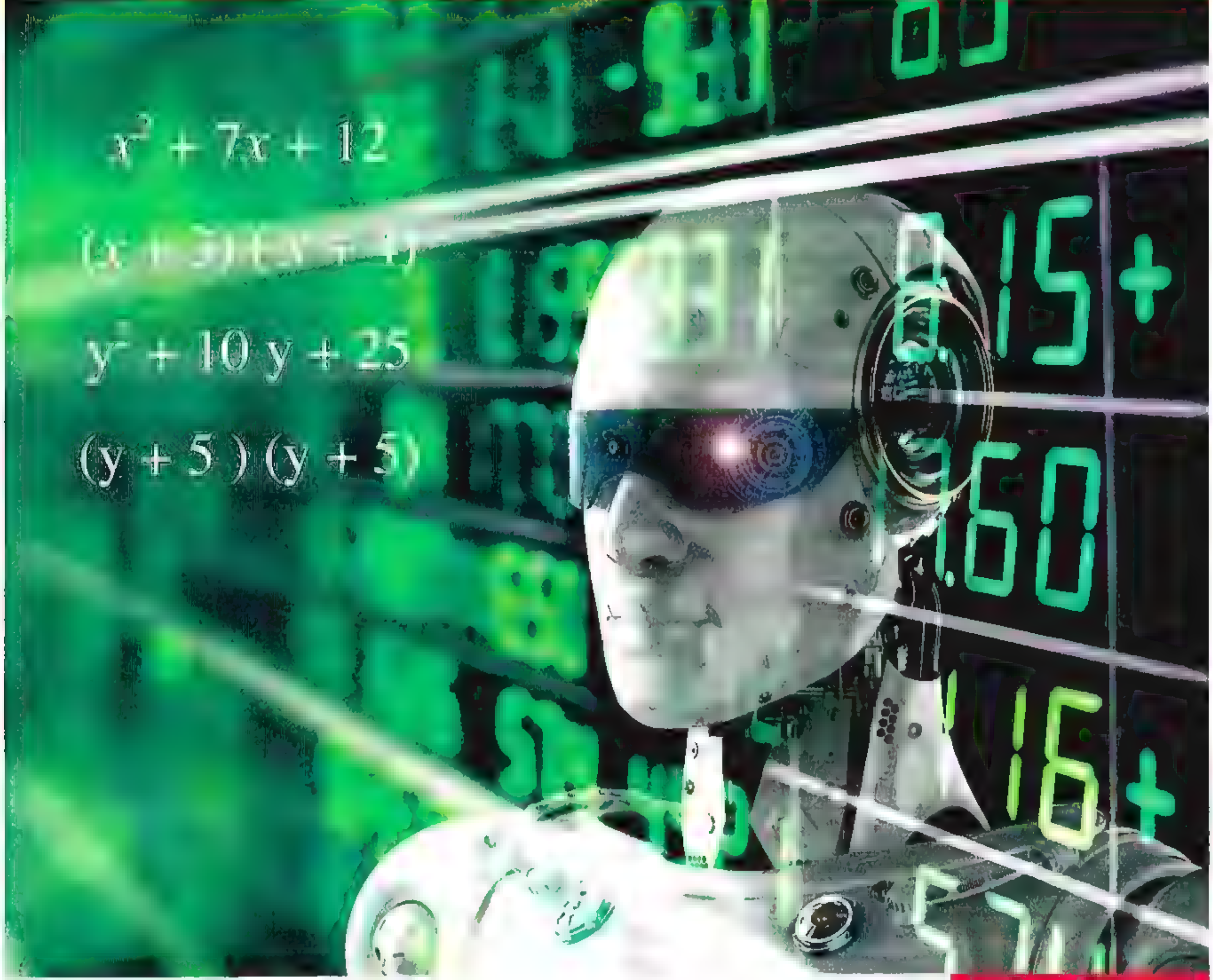
3 إذا كانت $A =]-\infty, 1]$ ، $B =]-2, 2]$

فأوجد على صورة فترة $B - A$

4 رتب تصاعديًا الأعداد: $2\sqrt{3}$ ، $3.\overline{5}$ ، $3\frac{1}{2}$

الوحدة الثانية 2

التحليل



دروس الوحدة

الدرس الأول: التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
(Factorizing by Taking Out Greatest Common Factor GCF)

الدرس الثانى: تحليل ثلاثية الحدود (Factorizing Trinomial)

الدرس الثالث: تحليل الحالات الخاصة (Factorizing Special cases)

الدرس الرابع: التحليل بالتقسيم (Factorizing by Grouping)

التحليل هو عملية رياضية مهمة تُستخدم فى بعض خوارزميات الذكاء الاصطناعى، حيث يتكامل كل نوع من أنواع التحليل مع جانب معين من تصميم وتدريب النماذج الذكية (تطبيقات الذكاء الاصطناعى).

- **فهل يمكن تطوير دور التحليل بأنواعه المختلفة في بناء وتطوير نماذج وتطبيقات الذكاء الاصطناعى؟**

القضايا والمهارات الحياتية:
- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.
- التنمية المستدامة.
- التواصل الرياضى.

القيم:
- تقدير الفن والجمال.
- الوعى البيئى.
- الاحترام.
- المسئولية.
- الوعى الثقافى.

ذاكر

الدرس 1

التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

(Factorizing by Taking Out Greatest Common Factor GCF)

$$x^2 + 5x$$
$$= x(x + 5)$$

$$a(m + n) + b(m + n)$$
$$= (m + n)(a + b)$$



نواتج التعلم



- يتعرف الطالب مفهوم التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- يحلل الطالب كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- يستخدم الطالب التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر في حل المشكلات.
- يحل الطالب المعادلات باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

مفردات أساسية

- التحليل (**Foctorization**)
- وحيدة الحد (**Monomial**)
- ثلاثية حدود (**Trinomial**)
- كثيرة الحدود (**Polynomial**)
- ثنائية حدود (**Binomial**)

فكر وناقش

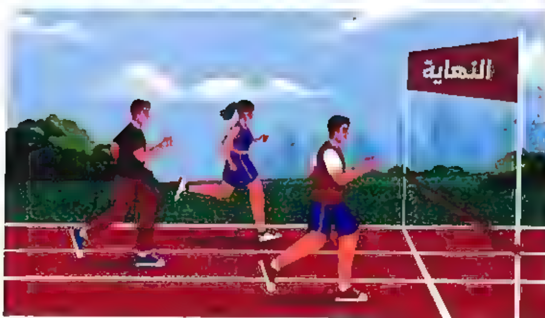
- في أحد النوادي الرياضية يُنظِّم سباق للعدائيين على مضمار مستطيل الشكل.

طول المضمار يُمثل بـ: $(3x + 6)$ متر

وعرضه يُمثل بـ: $(x + 2)$ متر

احسب نصف محيط المضمار.

هل يمكن تحليل هذا التعبير باستخدام العامل المشترك الأكبر.



- في هذا الدرس سوف نتعلم كيفية التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم 1 تحليل كثيرة الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ)

كثيرة الحدود هى تعبير رياضى فيه جميع أسس متغيراته (إن وجدت) تكون أعدادًا صحيحة موجبة.

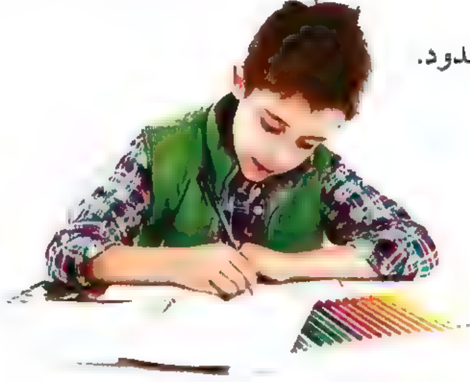
أمثلة لكثيرات الحدود:

- كثيرة حدود (وحيدة الحد): $\frac{1}{2}xy$, y^2 , $2ab$, $-x$
- كثيرة حدود (ثنائية حدود): $2a^2b+3ba$, x^2+2xy , $x-y$
- كثيرة حدود (ثلاثية حدود): $2a^2+3b+8$, x^3+x^2-3y

لاحظ أن

1 كلًا من $x^{1.5}-y$, $\frac{1}{y}$, $3a^{\frac{1}{2}}$, $2x^{-2}+3y$ ليست كثيرات حدود.

لأن:
- $2x^{-2}+3y$ «أس المتغير x عدد صحيح سالب».
- $3a^{\frac{1}{2}}$ «أس المتغير a عدد غير صحيح».
- $\frac{1}{y}=y^{-1}$ «أس المتغير y عدد صحيح سالب».
- $x^{1.5}-y$ «أس المتغير x عدد غير صحيح».



2 كثيرة الحدود هى وحيدة حد، أو مجموع وحيدات حد، ووحيدات الحد هى حدود كثيرة الحدود.

تذكر أن

يمكن توزيع الضرب على كل من الجمع والطرح كالآتى:

- $3a(3a-4)=9a^2-12a$
- $a(a^2-a)=a^3-a^2$
- $7x(x+2)=7x^2+14x$

كيفية تحليل كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ):

تحليل كثيرة الحدود: هو تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عاملين (أو أكثر):

عند تحليل كثيرة الحدود $(9a^2-12a)$ نتبع الخطوات الآتية:

خطوة (1)

حلل كل حد كحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس 1 كما يلى:

$9a^2 = 3\times 3\times a\times a$

$12a = 2\times 2\times 3\times a$

∴ ع.م.أ هو $3a$

خطوة (2)

اقسم $(9a^2-12a)$ على ع.م.أ $(3a)$ كالآتى:

$\frac{9a^2}{3a}-\frac{12a}{3a}=3a-4$

فيكون خارج القسمة:

$(3a-4)$

خطوة (3)

اكتب ع.م.أ خارج القوسين، واكتب خارج القسمة داخل القوسين:

تحليل

$9a^2-12a = 3a(3a-4)$

توزيع

مثال 1

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1 $12x^2 + 16$ 2 $6a^4 - 5a^2$

3 $4x^3 - 8x^2 + 12x$ 4 $36ab - 24a^2b - 18ab^2$

الحل

1 حيث إن : (ع.م.أ) للعوامل العددية هو : 4

$$\therefore 12x^2 + 16 = 4\,(3x^2 + 4)$$

2 حيث إن : (ع.م.أ) هو : a^2

$$\therefore 6a^4 - 5a^2 = a^2\,(6a^2 - 5)$$

3 حيث إن : (ع.م.أ) هو : $4x$

$$\therefore 4x^3 - 8x^2 + 12x = 4x\,(x^2 - 2x + 3)$$

4 حيث إن : (ع.م.أ) هو : $6ab$

$$\therefore 36ab - 24a^2b - 18ab^2 = 6ab\,(6 - 4a - 3b)$$

لاحظ أن

لإيجاد (ع.م.أ) بين حدود كثيرات الحدود:

1 نوجد (ع.م.أ) للعوامل العددية إن وجد.

2 نأخذ كل متغير مكرر فى كل الحدود إن وجد بأصغر أس له.

$$ax + ay = a\,(x + y)$$

نقاط هامة

- يمكن التحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة باستخدام خاصية التوزيع للحصول على كثيرة الحدود الأصلية.
- إذا كان معامل الحد الأول فى كثيرة الحدود سالبًا، فيفضل أخذ (−1) عاملًا مشتركًا من كل حد من حدود كثيرة الحدود.

فمثلًا

▶ $-a + b - c = -(a - b + c)$

▶ $-4x^4 + 12x^3 - 8x^2 = -4x^2(x^2 - 3x + 2)$

- كثيرة الحدود التى لا يمكن تحليلها تسمى «**كثيرة حدود أولية**»، مثل:

▶ $x^2 - 2x + 16$, $ab + 3$, $x + y$, $3x^2 + 7$

سؤال 1

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج (ع.م.أ)

1 $8x^2 + 16$ 2 $3x^4 + 3x^2$ 3 $2x^2 - 2x + 2$

4 $15x^2y^2 - 30xy^3$ 5 $2a^3b^2 + 8a^2b^3 + 16ab$ 6 $-2x^5 + 2x^3 - 6x + 4x^2$

مثال 2 أوجد القيمة العددية لكل مما يأتى باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1 $83 \times 57 + 83 \times 43$ 2 $43 \times 87 - 43 \times 30 + (43)^2$

3 $13 \times 115 - 13 \times 16 + 13$ 4 $\frac{(15)^2 + 15 \times 2 - 15}{16}$

الحل

1 (ع.م.أ) هو : 83

$83 \times 57 + 83 \times 43 = 83\,(57 + 43) = 83 \times 100 = 8300$

2 (ع.م.أ) هو : 43

$43 \times 87 - 43 \times 30 + (43)^2 = 43\,(87 - 30 + 43) = 43 \times 100 = 4300$

3 (ع.م.أ) هو : 13

$13 \times 115 - 13 \times 16 + 13 = 13\,(115 - 16 + 1) = 13 \times 100 = 1300$

4 (ع.م.أ) للبسط هو : 15

$\frac{(15)^2 + 15 \times 2 - 15}{16} = \frac{15\,(15 + 2 - 1)}{16} = \frac{15 \times 16}{16} = 15$

مثال 3 حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1 $16a\,(a - b) + 24b\,(a - b)$ 2 $x(m - n) + y\,(n - m)$

3 $(x + 2)^2 + 3\,(x + 2)$ 4 $(x - 5)^2 - x + 5$

الحل

1 (ع.م.أ) هو: $8\,(a - b)$

$\therefore 16\,a\,(a - b) + 24\,b\,(a - b) = 8\,(a - b)\,(2a + 3b)$

2 $x(m - n) + y\,(n - m) = x(m - n) - y\,(m - n)$

$= (m - n)\,(x - y)$

3 (ع.م.أ) هو: $(x + 2)$

$\therefore (x + 2)^2 + 3\,(x + 2) = (x + 2)\,(x + 2 + 3)$

$= (x + 2)\,(x + 5)$

4 $(x - 5)^2 - x + 5 = (x - 5)^2 - (x - 5)$

$= (x - 5)\,(x - 5 - 1) = (x - 5)\,(x - 6)$

لاحظ أن

يمكن أخذ القوس المكرر الذى بداخله كثيرة حدود كعامل مشترك.

لاحظ أن

$n - m = -(m - n)$

لاحظ أن

$-x + 5 = -(x - 5)$

س؟ سؤال 2

1 أوجد القيمة العددية لكل مما يأتى باستخدام التحليل بإخراج (ع.م.أ)

(أ) $19 \times 23 + 19 \times 27$ (ب) $37 \times 163 - 37 \times 26 - (37)^2$

(جـ) $25 \times 158 - 25 \times 57 - 25$ (د) $\frac{3^2 - 3 \times 7 - 3}{5}$

2 حلل كثيرات الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر:

(أ) $12\,(x + y) - 18\,y\,(x + y)$ (ب) $(x - 5)^2 - 2\,(x - 5)$

(جـ) $(x + 3)^2 - x - 3$ (د) $9x^3(3a - b) + 4y\,(3a - b) - (3a - b)$

مثال 4

إذا كان: $x + y = 5$ ، $a + b = 3$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $a(x+y) + b(x+y)$

باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

الحل

$$a(x+y) + b(x+y)$$

$$= (x+y)(a+b)$$

$$= 5 \times 3 = 15$$

مثال 5

إذا كان: $5a + 4b = 65$, $5a(2a-3b) + 4b(2a-3b) = 195$

أوجد القيمة العددية للمقدار: **(2a − 3b)**

الحل

$$5a(2a-3b) + 4b(2a-3b) = 195$$

$$(2a-3b)(5a+4b) = 195$$

$$(2a-3b) \times 65 = 195$$

$$\therefore 2a - 3b = \frac{195}{65} = 3$$

مثال 6

ينظم مدرب لياقة بدنية حصتين تدريبيتين

الحصة الأولى تحتوى على عدد $(6x + 12)$ حركة

الحصة الثانية تحتوى على عدد $(3x + 9)$ حركة

احسب إجمالى عدد الحركات، ثم حلل الناتج إلى حـ

ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج (ع.م.أ)

الحل

إجمالى عدد الحركات يساوى $(9x + 21)$ حركة.

(لأن: $6x + 12 + 3x + 9 = 9x + 21$)

التحليل هو: $9x + 21 = 3(3x + 7)$

سؤال 3

1. إذا كان: $2x + y = 7$ ، $x + 2y = 8$

فأوجد القيمة العددية للمقدار: $2x(x+2y) + y(x+2y)$

2. حلل بإخراج العامل المشترك الأعلى للمقدار: $4x(2x+3y) + 6y(2x+3y)$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عندما: $(2x+3y) = |-7|$

مثال 7

إذا كان: $7x + 21 = c(x + d)$ ، $10x - 5 = a(2x - b)$

فأوجد القيمة العددية للمقدار: $a^d + c^b$

الحل

$\because 7x + 21 = c(x + d)$

$\therefore 7(x + 3) = c(x + d)$

بمقارنة المعاملات:

$\therefore c = 7 \quad , \quad d = 3$

$\because 10x - 5 = a(2x - b)$

$\therefore 5(2x - 1) = a(2x - b)$

بمقارنة المعاملات:

$\therefore a = 5 \quad , \quad b = 1$

▸ $a^d + c^b = (5)^3 + (7)^1 = 125 + 7 = 132$

تعلم 2 حل المعادلات باستخدام التحليل بإخراج (ع.م.أ)



حقيقة إذا كان a , b عددين حقيقيين وكان $a \times b = 0$

فإن : $a = 0$ أو $b = 0$

مثال 8

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R:

1 $x^2 + 2x = 0$ 2 $12x^2 - 4x = 0$

الحل

1 $\because x^2 + 2x = 0$

$\therefore x(x + 2) = 0$

$\therefore$ إما $x + 2 = 0$ أو $x = 0$

ومنها $x = -2$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{0 \text{ ، } -2\}$

2 $\because 12x^2 - 4x = 0$

$\therefore 4x(3x - 1) = 0$

$\therefore$ إما $3x - 1 = 0$ أو $4x = 0$

ومنها $3x = 1$ ومنها $x = 0$

أى أن: $x = \frac{1}{3}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{0 \text{ ، } \frac{1}{3}\right\}$

نقاط هامة

- يمكن التحقق من صحة حل أى معادلة بالتعويض بقيمة المجهول فى المعادلة الأصلية.

فمثلًا:

للتحقق من أن مجموعة حل المعادلة $x^2 + 2x = 0$ هى $\{0 , -2\}$ نعوض عن قيمة x بكل من -2 , 0 فى المعادلة الأصلية كالتالى:

عند $x = -2$

$(-2)^2 + 2(-2) \stackrel{?}{=} 0$

$4 + (-4) \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

أى أن (-2) حل للمعادلة : $x^2 + 2x = 0$

عند $x = 0$

$(0)^2 + 2(0) \stackrel{?}{=} 0$

$0 + 0 = 0$

$0 = 0$

أى أن (0) حل للمعادلة : $x^2 + 2x = 0$

- عند حل المعادلة $12x^2 = 4x$ لا يجوز قسمة طرف المعادلة على المتغير x ؛ لأن إحدى قيم x هى 0 ، والقسمة على 0 تؤدى إلى نتائج خاطئة.

تحليل كثيرة الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ)

1 حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1. $4x^2 + 10$
2. $9x + 15$
3. $3x^2 + 6x$
4. $8y^3 - 4y^2$
5. $35a + 10a^2$
6. $49b^2 - 7b^3$
7. $4m - mn$
8. $15a - 25b$
9. $18a + 27ab$
10. $-9k - 81m$
11. $21c^2d^2 - 14c^2d$
12. $20x^3y^2 - 5x^2y$

2 حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ):

1. $9a^2b - 6ab^2 + 3ab$
2. $2a - 4ab - 6abc$
3. $16a^6 - 4a^4 + 12a^2$
4. $x^2y^3 + x^2y^2 + x^3y^2$
5. $-4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 12x^2$
6. $9m^4n^2 - 6m^3n^3 + 12m^2n^4$
7. $-2x^5 + 4x^2 - 6x + 2x^3$
8. $18a^2bc - 6abc + 30abc^2 - 24a$

3 حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1. $L(a+b) + M(a+b)$
2. $3x(a+b) + 7(a+b)$
3. $a(b+5) + 2(b+5)$
4. $(x+4)x^2 + (x+4)y^2$
5. $(4x-1) - y(4x-1)$
6. $(2x-3)^2 - 2(2x-3)$
7. $(7x-5)^2 - 7x + 5$
8. $(x+2)^3 - 2(x+2)^2$
9. $8x(z-y) + 4(y-z)$

4 أجب عما يأتي:

1. إذا كان: $x + y = 8$ ، $L - M = 9$ فأوجد القيمة العددية للمقدار: $x(L-M) + y(L-M)$
2. إذا كان: $a + b = 5$ ، $x + y = 4$ فأوجد القيمة العددية للمقدار: $x(a+b) + y(a+b)$
3. إذا كان: $a - b = 7$ فأوجد القيمة العددية للمقدار: $a(a-b) - b(a-b) + 1$
4. إذا كان: $xy = 3$ ، $x + y = 7$ فأوجد القيمة العددية للمقدار: $2x^2y + 2xy^2$

5 أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1 $25 \times 12 - 25 \times 2$
2 $52 \times 43 - 52 \times 23$
3 $18 \times 115 - 18 \times 15$
4 $(58)^2 + 58 \times 42$
5 $15 \times 17 + 15 \times 13 - 15 \times 30$
6 $(48)^2 + 48 \times 7 + 45 \times 48$
7 $7 \times 123 - 7 \times 5 - 7 \times 18$
8 $6 \times (15)^2 + 18 \times 15 - 8 \times 15$
9 $\frac{(26)^2 - 2 \times 26 + 26}{25}$
10 $\frac{(13)^2 + 13 \times 4 - 13}{16}$
11 $6 \times \frac{8}{13} + 7 \times \frac{8}{13}$
12 $\frac{25}{17} + 12 \times \frac{5}{17}$

6 اختر الإجابة الصحيحة:

1 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود: $3x^2y - 6x$ هو ....

(أ) $3x$ (ب) $6x$ (جـ) $3xy$ (د) $xy - 4$

2 ما العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $12x^2 - 8x$؟ ....

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) $2x$ (د) $4x$

3 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $14x^2y - 35xy^2$ هو ....

(أ) $7xy$ (ب) $14x^2y$ (جـ) $35x^3y^3$ (د) $5x^3y^4$

4 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $8x^3 - 4x^2 + 12x$ هو ....

(أ) $2x$ (ب) $3x^2$ (جـ) $4x$ (د) $8x$

5 أي مما يلي يمثل تحليلًا لكثيرة الحدود: $16x^2 - 24x^3$ بإخراج (ع.م.أ) ؟ ....

(أ) $8x(2x - 3x^2)$ (ب) $4x^2(4 - 6x)$ (جـ) $8x^2(2 - 3x)$ (د) $8(2x^2 - 3x^3)$

6 $33x^2y^2 + 55xy = 11xy(................)$

(أ) 8 (ب) $3x + 5y$ (جـ) $3xy + 5$ (د) $3 + 5xy$

7 $4a^2b^2 - 2ab^2 + 4a^2b = ... (2ab - b + 2a)$

(أ) $4ab$ (ب) $2ab$ (جـ) $2a^2$ (د) $2b^2$

8 $6a - 8b = ...$

(أ) $6(a - 2b)$ (ب) $4(2a - 4b)$ (جـ) $2(3a - 4b)$ (د) $14(a - b)$

9 $x^2y - xy^2 = ...$

(أ) $xy(x - y)$ (ب) $x^2y(1 - y)$ (جـ) $xy^2(x - 1)$ (د) $xy(y - x)$

10 $x(a + b) + y(a + b) = ...$

(أ) $(x - y)(a - b)$ (ب) $(x + y)(a + b)$ (جـ) $(x - y)(a + b)$ (د) $(x + y)(a - b)$

11 إذا كان: $a - b = 7$ ، $x + y = 10$ فإن: $x(a-b) - y(b-a)$ ....

(أ) 3 (ب) 17 (جـ) 51 (د) 70

12 إذا كان: $x + y = 5$ فإن: $4x + 4y =$ ....

(أ) 40 (ب) 30 (جـ) 8 (د) 20

13 إذا كان: $2L + 2M = 12$ فإن القيمة العددية للمقدار .... $= L + M$

(أ) 4 (ب) 8 (جـ) 12 (د) 6

14 إذا كان: $L + M = 4$ ، $x - y = 5$ فإن: $x(L+M) - y(L+M) =$ ....

(أ) 20 (ب) 10 (جـ) 1 (د) 9

15 إذا كان: $x + y = 5$ ، $x^2 + xy = 40$ فإن: $x =$ ....

(أ) 20 (ب) 10 (جـ) 5 (د) 8

16 إذا كان: $L(L-M) + M(L-M) = 32$ ، $L - M = 16$ فإن: $L + M =$ ....

(أ) 16 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 8

17 إذا كان: $a + b = 8$ ، $a(5L-3M) + b(5L-3M) = 72$ ، فإن: $5L - 3M =$ ....

(أ) 9 (ب) 2 (جـ) 15 (د) 8

18 أبسط صورة للمقدار: $\frac{5x - 5y}{8y - 8x}$ هي .... (حيث $x \neq y$)

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) $\frac{x}{y}$ (جـ) صفر (د) $\frac{-5}{8}$

19 إذا كان: $abc = 24$ ، $a + b + c = 9$ فإن القيمة العددية للمقدار: $a^2bc + ab^2c + abc^2 - 9\,abc =$ ....

(أ) 116 (ب) 33 (جـ) $\frac{8}{3}$ (د) صفر

20 إذا كان: $6x - 6y = 24$ ، فإن: $(x-y)^2 =$ ....

(أ) 8 (ب) 4 (جـ) 16 (د) 32

حل المعادلات باستخدام التحليل بإخراج (ع.م.أ)

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في R :

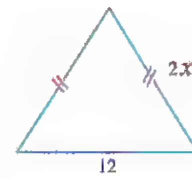
1 $4x^2 + 8x = 0$ 2 $x^2 - x = 0$ 3 $5x - x^2 = 0$

4 $2x^2 - 3x = 0$ 5 $x^2 = 4x$ 6 $x^2 = 5x$

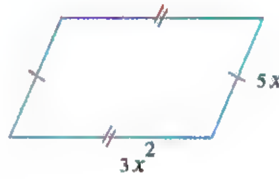
7 $2m^2 = 18m$ 8 $12x^2 - 4x = 0$ 9 $7y^2 = 3y$

8 أوجد محيط كل من الأشكال الآتية فى صورة عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

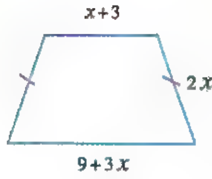
1



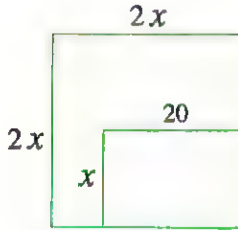
2



3



9 مهندس لديه قطعة أرض على شكل مربع طول ضلعه $(2x)$م ، أراد أن يبنى عليها بيتًا على شكل مستطيل بعداه x م ، 20 م وأن يستخدم المساحة المتبقية كحديقة كما بالشكل. **أوجد** مساحة الحديقة واكتب الناتج كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.



10 يقفز الدولفين لأعلى بحيث يكون ارتفاعه بالمتر بعد زمن (n) ثانية مساويًا $(16n - 8n^2)$. **اكتب** ارتفاع الدولفين كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر، ثم **أوجد** ارتفاعه عند $n = 1$.



11 ينتج مصنع أدوات مدرسية نوعين من المنتجات، كراسات وأقلامًا، تكلفة الكراسة الواحدة $(6x^2y)$ جنيه، وتكلفة القلم الواحد $(9xy^2)$ جنيه، فإذا أنتج المصنع 300 من الكراسات، وأنتج 200 من الأقلام. **اكتب** التعبير الرياضى الذى يمثل إجمالى تكلفة التصنيع كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.



TIMSS تفكير إبداعى

12 إذا كان $14x + 10 = a(7x + b)$ ، $6x + 9 = c(2x + d)$

فأوجد القيمة العددية للمقدار $d^c + b^a$

13 حلل تحليلًا تامًّا: $a^{x+y} + a^x b^y - a^y b^x - b^{x+y}$

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرات الحدود $4x^4 + 12x^3$ هو ....

(أ) $4x^2$ (ب) $4x^3$ (جـ) $4x$ (د) 4

2 مجموعة حل المعادلة: $x^2 - 5x = 0$ فى R هى ....

(أ) $\{0, 5\}$ (ب) $\{5\}$ (جـ) $\{0\}$ (د) $\{0, -5\}$

3 إذا كان $x + y = xy = 5$ ، فإن القيمة العددية للمقدار $x^2y + xy^2 =$ ....

(أ) 5 (ب) 25 (جـ) 50 (د) 30

4 أى مما يلى يمثل تحليلًا لكثيرة الحدود: $12a^2b + 18a^3b^2$ بإخراج (ع.م.أ)؟

(أ) $6a^2b^2(2 + 3a)$ (ب) $6ab(2a + 3b)$ (جـ) $6a^2b(2 + 3ab)$ (د) $6a^2b$

5 إذا كان: $3^{x-2} = 1$ فإن قيمة .... $= x$

(أ) 2 (ب) 1 (جـ) 0 (د) -2

6 إذا كان: $a - b = 9$ ، $L - M = 7$ ، فإن القيمة العددية للمقدار $L(a - b) + M(b - a) =$ ....

(أ) $-\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{7}{9}$ (جـ) 63 (د) -63

7 $12xy^2 - 15xy =$ .... $(4y - 5)$

(أ) $3x$ (ب) 3 (جـ) $3xy$ (د) $3y$

8 $R - Q =$ ....

(أ) Q (ب) $\grave{Q}$ (جـ) Z (د) N

2 أجب عما يأتى:

1 حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر:

(أ) $15a^2 - 35a$ (ب) $L^2M + M^2L + LM$

(جـ) $6(x + y) + 12a(x + y)$ (د) $3x + 6 - (x + 2)^2$

2 أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى R:

(أ) $3x - x^2 = 0$ (ب) $5x^2 - 40 = 0$

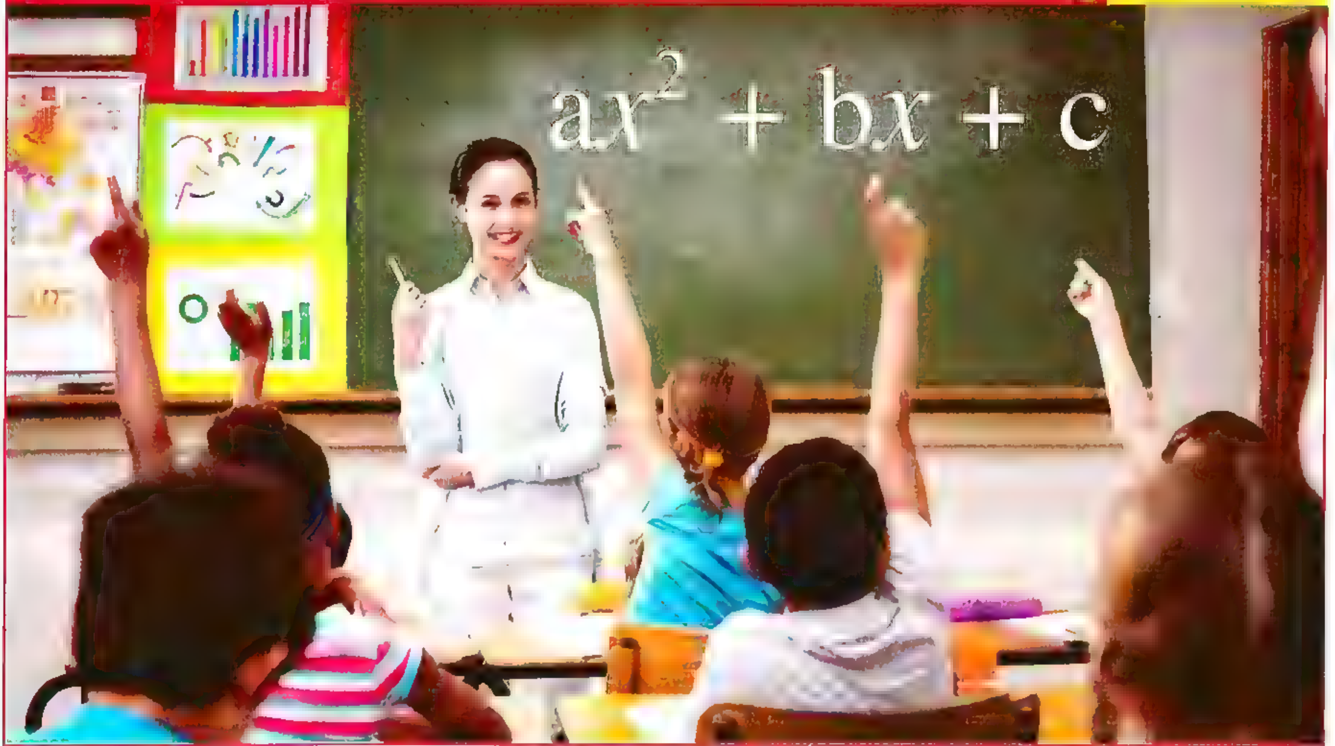
3 استخدم التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر لإيجاد قيمة:

$13 \times 15 + 13 \times 84 + 13$

ذاكر

الدرس 2

تحليل ثلاثية الحدود
(Factorizing Trinomial)





نواتج التعلم

- يحلل الطالب ثلاثية الحدود على الصورة: $x^2 + bx + c$
- يحلل الطالب ثلاثية الحدود على الصورة: $ax^2 + bx + c$ (حيث: $a \neq \pm 1$)
- يستخدم الطالب التحليل فى حل معادلات تربيعية.
- يستخدم الطالب التحليل فى حل مشكلات حياتية.



- تحليل (Factorizing)
- معادلة تربيعية (Quadratic equation)
- ثلاثية الحدود (Trinomial)



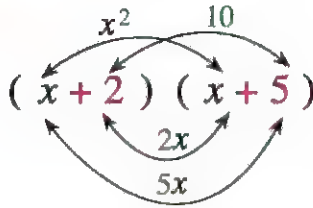
فكر وناقش

- حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $(x^2 + 6x + 8)$ م^2
وطولها $(x + 4)$ م .
أوجد محيطها بدلالة x



- فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحليل ثلاثية الحدود، ومن ثم استخدام التحليل فى حل المعادلات التربيعية، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم 1 تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $x^2 + bx + c$



- عند ضرب ثنائيتى الحدود المقابلتين بمجرد النظر:

كما يلى: ▶ $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$

نجد ان : فى ناتج الضرب ثلاثية حدود، نلاحظ أن:

- الحد الأول x^2 : هو حاصل ضرب الحدين الأولين فى ثنائيتى الحدود x ، x
- معامل الحد الأوسط 7 فى ثلاثية الحدود هو ناتج جمع الحدين الأخيرين فى ثنائيتى الحدود 5 ، 2
- الحد الأخير 10 فى ثلاثية الحدود: هو حاصل ضرب الحدين الأخيرين فى ثنائيتى الحدود 5 ، 2

عملية تحليل ثلاثية الحدود هى عملية عكسية لعملية الضرب

◄ لتحليل ثلاثية الحدود: $x^2 + 7x + 10$

- ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما 10 ومجموعهما 7

نجد أن: العددين هما 5 ، 2 حيث: $2 \times 5 = 10$ ، $2 + 5 = 7$

وبالتالى فإن: ▶ $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

◄ **بصفة عامة**

- لتحليل ثلاثية الحدود على صورة: $x^2 + bx + c$ (حيث c ، b عددان صحيحان)

نوجد عددين صحيحين ℓ ، m (بحيث: $b = \ell + m$ ، $c = \ell m$)

ثم نكتب $x^2 + bx + c = (x + \ell)(x + m)$ مع ملاحظة أنه:

1 إذا كانت c موجبة فإن ℓ و m لهما نفس إشارة b

2 إذا كانت c سالبة فإن ℓ و m مختلفان فى الإشارة وأكبرهما عدديًا له نفس إشارة b

مثال 1 حلل كلاً مما يأتى:

1 $x^2 + 8x + 15$ 2 $x^2 - 5x + 4$

الحل

1 لتحليل ثلاثية الحدود: $x^2 + 8x + 15$

نبحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (+15) ومجموعهما (+8)، كما بالجدول المقابل:

حواصل الضرب الممكنة	المجموع المناظر
(1)(15)	16 ✗
(3)(5)	8 ✓

∴ العددان هما +3 ، +5

∴ العـددان موجـبان

$\therefore x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$

حواصل الضرب الممكنة	المجموع المناظر
(−1)(−4)	✓ −5
(−2)(−2)	✗ −4

∴ العددان هما −4 ، −1

2 لتحليل ثلاثية الحدود: $x^2 - 5x + 4$

نبحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (+4) ومجموعهما (−5)

∴ العددان سالبان

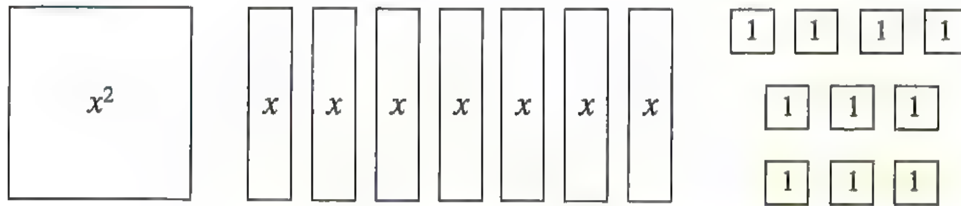
$$\therefore\ x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

نمذجة

- يمكننا استخدام نماذج البطاقات لتحليل ثلاثية الحدود على صورة $x^2 + bx + c$

فمثلًا لتحليل $x^2 + 7x + 10$

1 نستخدم البطاقات التالية:



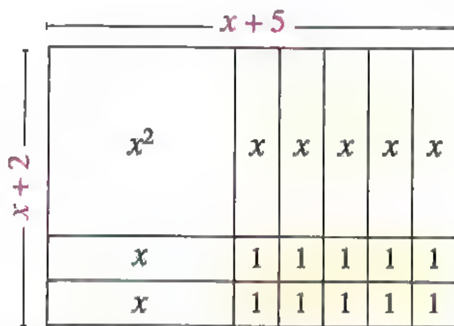
حيث x^2 تمثل مساحة مربع طول ضلعه x وحدة طول.

، $7x$ تمثل مساحة عدد 7 مستطيلات أبعاد كلٍّ منها 1 وحدة طول ، x وحدة طول.

، 10 تمثل مساحة عدد 10 مربعات طول ضلع كلٍّ منها 1 وحدة طول.

2 نكون مستطيلًا مساحته باستخدام جميع البطاقات كالتالي:

$$\therefore\ x^2 + 7x + 10$$
$$= (x + 2)(x + 5)$$



مثـال 2 حلل كلاًّ مما يأتي:

1 $x^2 + x - 20$ 2 $x^2 - 4x - 21$ 3 $y(y + 2) - 15$

الحـل

1 لتحليل ثلاثية الحدود: $x^2 + x - 20$

نبحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (−20) ومجموعهما (+1)

∴ العددان مختلفان في الإشارة (وأكبرهما عدديًا إشارته موجبة)

$$\therefore\ x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

حواصل الضرب الممكنة	المجموع المناظر
(−1)(20)	✗ +19
(−2)(10)	✗ +8
(−4)(5)	✓ +1

∴ العددان هما +5 ، −4

2 لتحليل ثلاثية الحدود: $x^2 - 4x - 21$

نبحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (−21) ومجموعهما (−4)

∴ العددان مختلفان في الإشارة (وأكبرهما عدديًا إشارته سالبة)

$\therefore\ x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$

حواصل الضرب الممكنة	المجموع المناظر
(1)(−21)	−20 ✗
(3)(−7)	−4 ✓

∴ العددان هما +3 ، −7

3 لتحليل: $y(y + 2) - 15$ نفك الأقواس أولًا

$\therefore\ y(y + 2) - 15 = y^2 + 2y - 15$

نبحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (−15) ومجموعهما (+2)

∴ العددان مختلفان في الإشارة (وأكبرهما عدديًا إشارته موجبة)

$\therefore\ y(y + 2) - 15 = y^2 + 2y - 15 = (y + 5)(y - 3)$

حواصل الضرب الممكنة	المجموع المناظر
(−1)(15)	+14 ✗
(−3)(5)	+2 ✓

∴ العددان هما −3 ، +5

مثال 3 حلل كلًا مما يأتي تحليلًا تامًا:

1 $4x^3 - 8x^2 - 60x$

2 $14x^2 - 7x^3 + 21x$

الحل

1 ▸ $4x^3 - 8x^2 - 60x$

$= 4x(x^2 - 2x - 15)$ إخراج ع.م.أ

$= 4x(x - 5)(x + 3)$ تحليل ثلاثية الحدود

2 ▸ $14x^2 - 7x^3 + 21x$

$= -7x^3 + 14x^2 + 21x$ ترتيب الحدود تنازليًا حسب أسس x

$= -7x(x^2 - 2x - 3)$ إخراج ع.م.أ

$= -7x(x - 3)(x + 1)$ تحليل ثلاثية الحدود

لاحظ أن

- التحليل التام: يقصد به كتابة كثيرة الحدود في صورة حاصل ضرب كثيرات حدود أولية.
- قبل البدء في تحليل ثلاثية الحدود يجب مراعاة ما يلي:
  1. فك الأقواس والاختصار إن وجد.
  2. ترتيب حدود المقدار تنازليًا أو تصاعديًا حسب أسس الرموز المعطاة، ويفضل تنازليًا.
  3. إخراج ع.م.أ بين حدود ثلاثية الحدود إن وجد.

سؤال 1

1 أجب عما يأتي:

(أ) أوجد عددين صحيحين حاصل ضربهما (+5) ومجموعهما (−6)

(ب) أوجد عددين صحيحين حاصل ضربهما (−12) ومجموعهما (+1)

2 حلل ما يأتي: (أ) $x^2 - 11x + 24$ (ب) $x(x + 3) - 18$

تعلم 2 تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $ax^2 + bx + c$ حيث $(a \neq \pm 1)$

مثال 4 حلل ثلاثية الحدود: $2x^2 + 9x + 10$ ◄

الحل

- لتحليل ثلاثية الحدود $2x^2 + 9x + 10$ نتبع الآتي:

1 نحلل $2x^2$ إلى $\boxed{2x \ , \ x}$ ⟵ $(2x \quad)(x \quad)$

2 نحلل العدد 10 إلى $\boxed{+1 \ , +10}$ أو $\boxed{+2 \ , \ +5}$
مع استبعاد العوامل السالبة لأن معامل x إشارته موجبة.

3 نحدد الحد الأوسط المناظر، كما بالجدول المقابل:

$\therefore \ 2x^2 + 9x + 10 = (2x + 5)(x + 2)$

التحليل الممكن	الحد الأوسط المناظر
$(2x + 1)(x + 10)$	$20x + x = 21x$ ✗
$(2x + 10)(x + 1)$	$2x + 10x = 12x$ ✗
$(2x + 2)(x + 5)$	$10x + 2x = 12x$ ✗
$(2x + 5)(x + 2)$	$4x + 5x = 9x$ ✓

- يمكننا استخدام طريقة التقاطع (المقص) لإجراء المحاولات السابقة كما يلي:

$(2x \quad +1)$ / $(x \quad +10)$: $20x + x = 21x \neq 9x$ (✗)

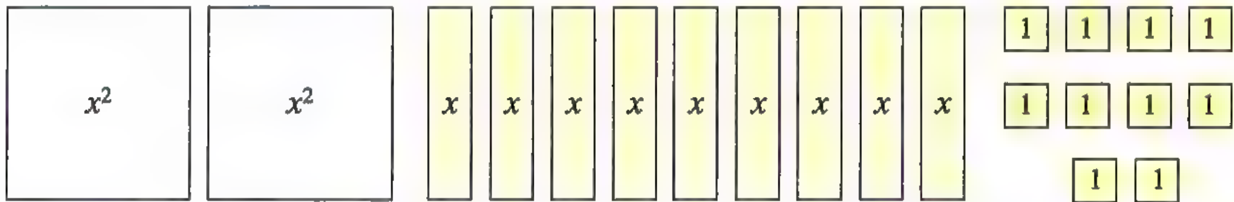
$(2x \quad +10)$ / $(x \quad +1)$: $2x + 10x = 12x \neq 9x$ (✗)

$(2x \quad +2)$ / $(x \quad +5)$: $10x + 2x = 12x \neq 9x$ (✗)

$(2x \quad +5)$ / $(x \quad +2)$: $4x + 5x = 9x$ الحد الأوسط (✓)

نمذجة ◄

1 يمكن استخدام نماذج البطاقات التالية لتحليل: $2x^2 + 9x + 10$



حيث $2x^2$ تمثل مساحة عدد 2 مربع طول ضلع كل منهما x وحدة طول

، $9x$ تمثل مساحة عدد 9 مستطيلات أبعاد كلٍّ منهما 1 وحدة طول ، x وحدة طول

، 10 تمثل مساحة عدد 10 مربعات طول ضلع كلٍّ منهما 1 وحدة طول

2 كوِّن مستطيلًا مساحته مستخدمًا جميع البطاقات كالتالي:

$2x + 5$ (الطول) ، $x + 2$ (العرض)

x^2	x^2	x	x	x	x	x
x	x	1	1	1	1	1
x	x	1	1	1	1	1

$\therefore \ 2x^2 + 9x + 10$

$= (2x + 5)(x + 2)$

مثال 5 حلل ما يأتى:

1 $5x^2 + 3x - 14$ 2 $3x^4 - 5x^2 - 12$ 3 $12x^2 + 14xy - 6y^2$

الحل

1 $5x^2 + 3x - 14$

$= (5x - 7)(x + 2)$

$(5x \quad -7)$

$(x \quad +2)$

$10x - 7x = 3x$

2 $3x^4 - 5x^2 - 12$

$= (3x^2 + 4)(x^2 - 3)$

$(3x^2 \quad +4)$

$(x^2 \quad -3)$

$-9x^2 + 4x^2 = -5x^2$

3 $12x^2 + 14xy - 6y^2$

$= 2(6x^2 + 7xy - 3y^2)$ إخراج ع.م.أ

$= 2(2x + 3y)(3x - y)$

$(2x \quad +3y)$

$(3x \quad -y)$

$-2xy + 9xy = 7xy$

مثال 6 إذا كان: $(2x - 1)$ أحد عامل ثلاثية الحدود $(14x^2 - 17x + 5)$ ، فما العامل الآخر؟

الحل

$(2x \quad -1)$

$(7x \quad -5)$

$-10x - 7x = -17x$

$\because 14x^2 - 17x + 5$

$= (2x - 1)(7x - 5)$

$\therefore$ العامل الآخر هو $(7x - 5)$

تعلم 3 حل المعادلات باستخدام التحليل:

مثال 7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 2 $x^2 - 3x = 10$

الحل

1 $\because x^2 - 8x + 15 = 0$

$\therefore (x - 3)(x - 5) = 0$

$\therefore$ إما $x - 3 = 0$ ومنها $x = 3$

أو $x - 5 = 0$ ومنها $x = 5$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{3 , 5\}$

2 $\because x^2 - 3x = 10$

$\therefore x^2 - 3x - 10 = 0$

$\therefore (x + 2)(x - 5) = 0$

$\therefore$ إما $x + 2 = 0$ ومنها $x = -2$

أو $x - 5 = 0$ ومنها $x = 5$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-2 , 5\}$

س؟ سؤال 2

1 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

(أ) $-13x - 3x^2 + 10$ (ب) $2x(x + 3) + 13x + 24$

2 إذا كان: $(y + 3)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $2y^2 + 7y + 3$ ، فما العامل الآخر؟

3 أوجد مجموعة حل المعادلات التالية فى R :

(أ) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (ب) $x^2 + 10 = 7x$

مثال 8 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1 $-x^2 + 24 = 5x$

2 $3x^2 + 11x - 20 = 0$

الحل

1 $\because -x^2 + 24 = 5x$

$\therefore x^2 + 5x - 24 = 0$

$\therefore (x+8)(x-3) = 0$

$\therefore$ إما $x + 8 = 0$ ومنها $\boxed{x = -8}$

أو $x - 3 = 0$ ومنها $\boxed{x = 3}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-8 , 3\}$

2 $\because 3x^2 + 11x - 20 = 0$

$\therefore (3x-4)(x+5) = 0$

$\therefore$ إما $3x - 4 = 0$ ومنها $\boxed{x = \frac{4}{3}}$

أو $x + 5 = 0$ ومنها $\boxed{x = -5}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\frac{4}{3} , -5\}$

تعلم 4 استخدام التحليل فى حل مشكلات حياتية:

مثال 9

لدى عماد صورة مستطيلة الشكل طولها 12 سم وعرضها 8 سم، ويريد زيادة الطول والعرض بنفس المقدار من أجل مضاعفة مساحة الصورة. فما الأبعاد الجديدة للصورة المكبرة؟

الحل

$\because$ مساحة الصورة = 8×12 = 96 سم^2

$\therefore$ ضعف مساحتها = 96×2 = 192 سم^2

- نفرض أن مقدار الزيادة هو x سم

$\therefore$ الطول بعد الزيادة = $(x + 12)$ سم ، العرض بعد الزيادة = $(x + 8)$ سم

$\therefore$ مساحة الصورة بعد الزيادة = $(x+12)(x+8)$

$\therefore (x+12)(x+8) = 192 \longrightarrow \therefore x^2 + 20x + 96 - 192 = 0$

$\therefore x^2 + 20x - 96 = 0 \longrightarrow \therefore (x+24)(x-4) = 0$

$\therefore$ إما $x + 24 = 0$ ومنها $\boxed{x = -24}$ مرفوض

أو $x - 4 = 0$ ومنها $\boxed{x = 4}$

$\therefore$ الأبعاد الجديدة للصورة هى 16 سم ، 12 سم

س؟ سؤال 3

مستطيل مساحته $(2x^2 + 3x + 1)$ سم^2 وطوله $(2x + 1)$ سم

أوجد عرضه، ثم احسب محيطه بدلالة x وأوجد القيمة العددية للمحيط عند $x = 2$

تحليل ثلاثية الحدود (Factorizing Trinomial)

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

أسئلة الكتاب المدرسي

تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $x^2 + bx + c$

1 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1) $x^2 + 11x + 10$ 2) $x^2 + 5x + 4$

3) $x^2 - 9x + 18$ 4) $x^2 - 7x + 12$

5) $x^2 - 8x + 12$ 6) $x^2 - 6x + 8$

7) $y^2 - 3y - 10$ 8) $x^2 - 3x - 28$

9) $x^2 + x - 30$ 10) $y^2 + y - 12$

11) $x^2 - 5xy + 6y^2$ 12) $x^2 + 5xy - 36y^2$

2 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1) $x^3 - 3x^2 - 28x$ 2) $x^2y^2 + xy^2 - 72y^2$

3) $7x^3 - 14x^2 - 21x$ 4) $3y^2 - 18y - 48$

5) $14x - 32 + x^2$ 6) $-x^2 + 3x + 40$

7) $6x^3 - 60x - 2x^2$ 8) $x(x + 4) - 60$

9) $x^2 - 4x - 3(x - 2)$ 10) $(x + 2)(x - 5) - 8$

11) $12x^2 + 60x + 72$ 12) $(x + y)^2 + 7(x + y) + 10$

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1) إذا كان $(x - 1)(x - a) = x^2 - 9x + 8$ ، فإن .... = a

(أ) 8 (ب) -8 (جـ) 1 (د) -1

2) أى مما يلى يمثل تحليل كثيرة الحدود $x^2 + x - 20$ ؟ ....

(أ) $(x - 4)(x + 5)$ (ب) $(x + 4)(x + 5)$ (جـ) $(x - 4)(x - 5)$ (د) $(x + 4)(x - 5)$

3) إذا كان $(x - 1)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $x^2 - 4x + 3$ ، فإن العامل الآخر هو ....

(أ) $x - 3$ (ب) $x + 3$ (جـ) $x - 4$ (د) $x + 1$

4) إذا كانت كثيرة الحدود $x^2 + 7x + b$ قابلة للتحليل، فإن قيمة b يمكن أن تساوى ....

(أ) 15 (ب) 12 (جـ) 18 (د) 49

5) إذا كانت كثيرة الحدود $x^2 + kx + 2$ قابلة للتحليل، فإن قيمة k يمكن أن تساوى ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

6) إذا كانت كثيرة الحدود $x^2 + Mx - 12$ قابلة للتحليل ، فإن قيمة M يمكن أن تساوى ....

(أ) 7 (ب) 8 (جـ) 4 (د) 13

7 العدد الذى يمكن إضافته لكثيرة الحدود $x^2 - 8x + 5$ حتى تكون قابلة للتحليل هو ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 5

8 إذا كان: $x^2 + ax + 15 = (x+3)(x+b)$ ، فما قيمة ab؟ ....

(أ) 5 (ب) 8 (جـ) 13 (د) 40

9 إذا كان: $x^2 - 11x + 28 = (x-a)(x-b)$ ، فما قيمة a + b؟ ....

(أ) -16 (ب) -11 (جـ) 11 (د) 16

10 إذا كان: $(x + 2y) = 4$ ، $x + 3y = 5$ ، فإن القيمة العددية لكثيرة الحدود $(x^2 + 5xy + 6y^2) =$ ....

(أ) 20 (ب) 21 (جـ) 30 (د) 9

تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $ax^2 + bx + c$ حيث $(a \neq \pm 1)$

4 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $2x^2 + 7x + 6$

2 $8x^2 + 8x + 2$

3 $3x^2 + 14x + 15$

4 $5y^2 - 7y + 2$

5 $7n^2 + 36n + 5$

6 $3a^2 + 7a - 6$

7 $6x^2 + 7xy - 3y^2$

8 $42x^2y^2 - 30x^2y^4 + 12x^2y^3$

5 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أى المخططات الآتية يمثل تحليل كثيرة الحدود: $9x^2 - 9x - 4$ ؟

(أ) $(3x - 4)$ ، $(3x + 1)$ (ب) $(3x - 2)$ ، $(3x + 2)$ (جـ) $(9x - 1)$ ، $(x + 4)$ (د) $(9x - 4)$ ، $(x + 1)$

2 إذا كان: $3x - 2y = 6, 2x + 3y = 5$ ، فما القيمة العددية لكثيرة الحدود $(6x^2 + 5xy - 6y^2)$؟ ....

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 30

3 إذا كان: $(x - 5)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(2x^2 - 7x - 15)$ ، فإن العامل الآخر هو ....

(أ) $x + 3$ (ب) $2x - 3$ (جـ) $2x + 3$ (د) $x - 3$

4 إذا كان: $(x + 1)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(2x^2 + 3x + 1)$ ، فإن العامل الآخر هو ....

(أ) $x + 1$ (ب) $x - 1$ (جـ) $2x - 1$ (د) $2x + 1$

5 إذاكان: $(x + 5)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(3x^2 + 16x + 5)$ ، فإن العامل الآخر هو ....

(أ) $3x - 1$ (ب) $3x + 1$ (جـ) $x - 5$ (د) $x + 5$

حل المعادلات باستخدام التحليل:

6 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1 $x^2+5x-36=0$ 2 $x^2-15x+56=0$

3 $x^2+7x=18$ 4 $x^2-21=4x$

5 $x^2+30=-13x$ 6 $6x^2-13x+6=0$

7 $3y^2+17y+10=0$ 8 $2x^2-9x=5$

7 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $(x-3)(x+5)=0$ ، فأى مما يلى صحيح فى R؟ ....

(أ) $x=3$ أو $x=5$ (ب) $x=3$ أو $x=-5$ (جـ) $x=-3$ أو $x=5$ (د) $x=-3$ أو $x=-5$

2 مجموعة حل المعادلة $(x-3)(x+2)=0$ فى R هى ....

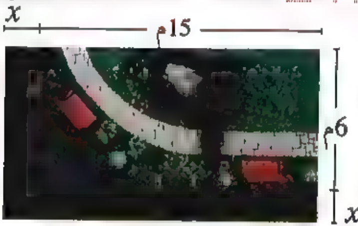
(أ) $\{3,-2\}$ (ب) $\{-6\}$ (جـ) $\{3,2\}$ (د) $\{2,-3\}$

3 مجموعة حل المعادلة $x(x-4)=5$ فى R هى ....

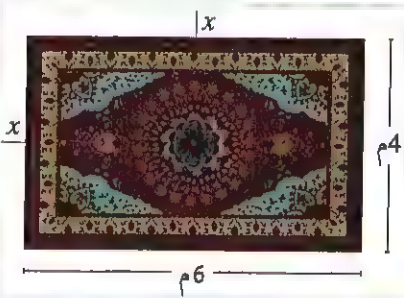
(أ) $\{-5,1\}$ (ب) $\{5,1\}$ (جـ) $\{5\}$ (د) $\{5,-1\}$

8 مثلث مساحته 54 سم^2 ، فإذا كان طول قاعدته يزيد بمقدار 3سم على ارتفاعه، فكم يكون ارتفاع هذا المثلث؟

9 يوسف لديه حديقة مستطيلة الشكل، بُعداها 6 م ، 15م ، ويريد زيادة مساحتها بمقدار 46 م^2 ، فإذا زاد طول وعرض الحديقة بنفس المقدار، فما الأبعاد الجديدة للحديقة؟



10 غرفة مستطيلة الشكل مساحة أرضيتها 48 م^2 ، أرادت فاطمة تغطية أرضيتها بسجادة طولها 6 م ، وعرضها 4 م مع ترك شريط عرضه x بين السجادة والحائط من جميع الجهات، أوجد عرض هذا الشريط.



تفكير إبداعى TIMSS

11 أوجد قيم b الصحيحة الموجبة التى تجعل كلًا مما يأتى قابلًا للتحليل:

1 $x^2+bx+12$ 2 $x^2+bx-14$ 3 x^2+8x+b

12 إذا كانت ثلاثية الحدود : $5h^2+kh-27$ قابلة للتحليل، حيث k عدد صحيح ينتمى إلى]7 , 10[، فأوجد قيمة المقدار: $(k-5)(k+3)$.

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 إذا كان $(x+3)(x-2) = x^2 + kx - 6$ ، فإن قيمة k = ...

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

2 إذا كان $(x-1)(x-a) = x^2 - 2x + 1$ ، فإن a = ...

(أ) -1 (ب) 3 (جـ) 2 (د) 1

3 (ع. م. أ) لكثيرة الحدود $3x^2 + 6x$ هو ....

(أ) 3 (ب) $3x$ (جـ) $6x$ (د) $9x^2$

4 مجموعة حل المعادلة $(2x-3)(x+1) = 0$ في R هي ....

(أ) $\left\{\frac{2}{3}, -1\right\}$ (ب) $\left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$ (جـ) $\left\{\frac{-3}{2}, -1\right\}$ (د) $\left\{\frac{-2}{3}, 1\right\}$

5 العدد الذي يمكن إضافته لثلاثية الحدود $x^2 - 6x + 3$ لتكون قابلة للتحليل هو ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 8

6 إذا كان $(x-3)$ أحد عاملي ثلاثية الحدود $(x^2 - 8x + 15)$ فإن العامل الآخر هو ....

(أ) $x-3$ (ب) $x+5$ (جـ) $x+3$ (د) $x-5$

7 إذا كان: $(x-9)(x-n) = x^2 - mx + 36$ فإن قيمة mn = ...

(أ) 52 (ب) 25 (جـ) 117 (د) 36

8 ثلاثية الحدود: $x^2 + 5x + b$ تقبل التحليل عندما b = ...

(أ) 5 (ب) 6 (جـ) 7 (د) 9

2 أجب عما يأتي:

1 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

(أ) $x^2 + 10x + 21$ (ب) $x^2 - x - 20$

(جـ) $x^2 + 9x - 36$ (د) $2x^2 - x - 6$

(هـ) 📖 $3a^2 + 6a - 9$ (و) 📖 $18 - 21x^2 - 9x^4$

2 أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في R:

(أ) $M^2 - 14M + 45 = 0$ (ب) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(جـ) $2x^2 + x = 6$ (د) $x^2 - 24 = -5x$

3 مستطيل مساحته $(2x^2 + 19x + 35)$ سم^2 ، أوجد بعديه بدلالة x ، ثم احسب محيطه عند $x = 3$

ذاكر | الدرس 3

تحليل الحالات الخاصة
(Factorizing Special Cases)





نواتج التعلم

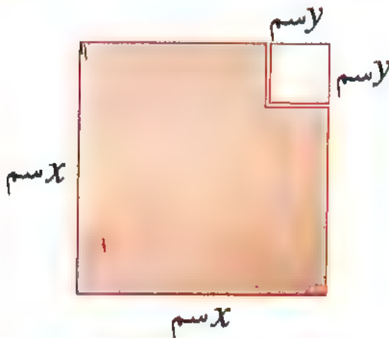
- يحلل الطالب ثلاثية الحدود التي تُمثل مربعًا كاملًا.
- يحلل الطالب الفرق بين مربعين.
- يحلل الطالب الفرق بين مكعبين.
- يحلل الطالب مجموع مكعبين.
- يستخدم الطالب التحليل لتسهيل إجراء العمليات الحسابية.
- يستخدم الطالب التحليل لحل بعض المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية

- المربع الكامل (Perfect square)
- الفرق بين مربعين (Difference of two squares)
- الفرق بين مكعبين (Difference of two cubes)
- مجموع مكعبين (Sum of two cubes)

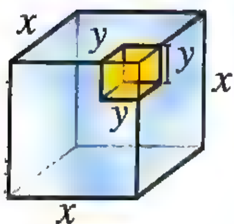


فكر وناقش



1 لدى رامى لوح خشبى مربع الشكل طول ضلعه x سم، وقام رامى بقطع مربع صغير منه طول ضلعه y سم.

فما مساحة الجزء المتبقى من اللوح الخشبى؟ وهل يمكن التعبير عن مساحة الجزء المتبقى كحاصل ضرب عاملين؟



2 مكعب من الزجاج حجمه x^3 وحدة مكعبة، قُطع منه مكعب أصغر حجمه y^3 وحدة مكعبة.

هل يمكنك التعبير عن حجم الجزء المتبقى كحاصل ضرب عاملين؟

- فى هذا الدرس، سوف تتعلم بعض الحالات الخاصة التى ستمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم 1 تحليل ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملاً:

التعرف على ثلاثية الحدود التى تُمثل مربعًا كاملًا

- إذا كانت حدودها مرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا حسب أسس أحد رموزها، فإنها تُمثل مربعًا كاملًا إذا كان:
- الحد الأول يمثل مربعًا كاملًا
- الحد الثالث يمثل مربعًا كاملًا
- الحد الأوسط يساوى

($\pm 2 \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$)

مثل: $a^2 + 2ab + b^2$ أو $a^2 - 2ab + b^2$

تحليل ثلاثية الحدود التى تُمثل مربعًا كاملاً

- نكتبها على صورة حاصل ضرب عاملين متساويين (أى: مربع أحد عامليها المتساويين):

أى أن:

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

مثال 1

بيّن أيًا من كثيرات الحدود الآتية تُمثل مربعًا كاملًا، وأيها ليست مربعًا كاملًا؟ ثم حلل كثيرة الحدود التى على صورة مربع كامل:

1 $49x^2 + 42x + 9$

2 $5x^2 + 20x + 4$

3 $16b^2 - 8b + 1$

4 $x^2 + 2xy - y^2$

5 $9x^4 - 12x^2y + 4y^2$

الحل

1 ∵ $2(7x)(3) = 42x$ «الحد الأوسط» ، $9 = (3)^2$ «مربع كامل» ، $49x^2 = (7x)^2$ «مربع كامل»

∴ كثيرة الحدود $(49x^2 + 42x + 9)$ تمثل مربعًا كاملًا، ويكون:

$$49x^2 \oplus 42x + 9 = (\sqrt{49x^2} \oplus \sqrt{9})^2 = (7x + 3)^2$$

نفس إشارة الحد الأوسط

2 كثيرة الحدود $(5x^2 + 20x + 4)$ ليست مربعًا كاملًا؛ لأن الحد الأول $(5x^2)$ ليس مربعًا كاملًا.

3 ∵ $-2(4b)(1) = -8b$ «الحد الأوسط» ، $1 = (1)^2$ «مربع كامل» ، $16b^2 = (4b)^2$ «مربع كامل»

∴ كثيرة الحدود $(16b^2 - 8b + 1)$ تمثل مربعًا كاملًا ؛ ويكون:

$$16b^2 \ominus 8b + 1 = (\sqrt{16b^2} \ominus \sqrt{1})^2 = (4b - 1)^2$$

نفس إشارة الحد الأوسط

4 كثيرة الحدود $(x^2 + 2xy - y^2)$ ليست مربعًا كاملًا؛ لأن الحد الثالث $(-y^2)$ سالب، أى: ليس مربعًا كاملًا.

5 ∵ $-2(3x^2)(2y) = -12x^2y$ «الحد الأوسط» ، $4y^2 = (2y)^2$ «مربع كامل» ، $9x^4 = (3x^2)^2$ «مربع كامل»

∴ كثيرة الحدود $(9x^4 - 12x^2y + 4y^2)$ تمثل مربعًا كاملًا، ويكون:

$$9x^4 \ominus 12x^2y + 4y^2 = (\sqrt{9x^4} \ominus \sqrt{4y^2})^2 = (3x^2 - 2y)^2$$

نفس إشارة الحد الأوسط

مثال 2 حلل كلًّا مما يأتي:

1 $x^2+x+\frac{1}{4}$

2 $12x-x^2-36$

3 $75x^3y+60x^2y+12xy$

لاحظ أن

- يمكن تحليل كثيرات حدود تحتوي على معاملات وثوابت نسبية إلى حاصل ضرب عوامل كل منها عبارة عن كثيرة حدود تحتوي أيضًا على معاملات وثوابت نسبية.
- كثيرة الحدود $(-x^2+12x-36)$ ليست مربعًا كاملًا. في حين أن معكوسها الجمعي $(x^2-12x+36)$ مربعًا كاملًا،
- يتم أخذ العامل المشترك الأكبر أولًا، ثم نحلل القوس الناتج إن أمكن.

الحل

1 $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

2 نرتب أولًا كثيرة الحدود تنازليًا حسب أسس x $\quad -x^2+12x-36$

نأخذ (-1) عاملًا مشتركًا $\quad =-(x^2-12x+36)$

$=-(x-6)^2$

3 $75x^3y+60x^2y+12xy=3xy(25x^2+20x+4)$

$=3xy(5x+2)^2$

مثال 3 استخدم التحليل لإيجاد قيمة كل مما يأتي:

1 $(35)^2+2(35)(65)+(65)^2$

2 $(49)^2-2(49)(39)+(39)^2$

الحل

1 $(35)^2+2(35)(65)+(65)^2=(35+65)^2=(100)^2=10000$

2 $(49)^2-2(49)(39)+(39)^2=(49-39)^2=(10)^2=100$

مثال 4

1 إذا كان: $x+y=6$ فأوجد قيمة المقدار: $x^2+2xy+y^2$

2 إذا كان: $a^2+2ab+b^2=36$ فما قيمة $a+b$ ؟

الحل

1 $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(6)^2=36$

2 $a^2+2ab+b^2=36$

$\therefore (a+b)^2=36 \qquad \therefore a+b=\pm\sqrt{36} \qquad \therefore a+b=\pm 6$

س سؤال 1

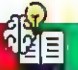
1 بيّن أيًا من كثيرات الحدود الآتية تُمثل مربعًا كاملًا، وأيها ليس مربعًا كاملًا؟ ثم حلل كثيرة الحدود التي على صورة مربع كامل:

(أ) $4x^2+20x+25$ (ب) n^2+4n-4

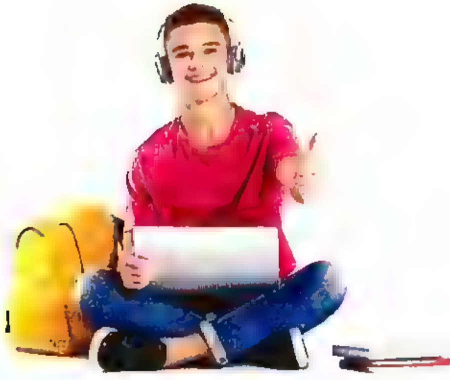
(جـ) $x^2+9x+81$ (د) $25x^4-30x^2y+9y^2$

2 استخدم التحليل لحساب قيمة كل مما يأتي:

(أ) $(57)^2+2(57)(43)+(43)^2$ (ب) $(101)^2-2(101)+1$



نقاط هامة



- كيفية إيجاد المجهول فى ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملًا:
  - الحد الأول يساوى $\dfrac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4 \times (\text{الحد الثالث})}$
  - الحد الثالث يساوى $\dfrac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4 \times (\text{الحد الأول})}$
  - الحد الأوسط يساوى

$$\pm 2 \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$$

مثال 5 أوجد قيمة a التى تجعل كلًّا مما يأتى مربعًا كاملًا:

1 $x^2 + 6x + a$

2 $4x^2 + ax + 49$ 📖

3 $121x^2 - ax + 4$

4 $a^2x^2 + 30xy + 9y^2$

الحل

1 لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$a = \frac{(6x)^2}{4 \times (x)^2} = \frac{36x^2}{4x^2} = 9$$

2 لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$ax = \pm 2\left(\sqrt{4x^2}\right)\left(\sqrt{49}\right)$$

$$= \pm 2(2x)(7) = \pm 28x$$

$$\therefore\ a = \pm 28$$

3 لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$-ax = \pm 2\left(\sqrt{121x^2}\right)\left(\sqrt{4}\right)$$

$$= \pm 2(11x)(2) = \pm 44x$$

$$\therefore\ a = \pm 44$$

4 لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$a^2x^2 = \frac{(30xy)^2}{4 \times (9y^2)} = \frac{900x^2y^2}{36y^2} = 25x^2$$

$$\therefore\ a^2 = 25 \qquad \therefore\ a = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

سؤال 2

أوجد قيمة a التى تجعل كلًّا مما يأتى مربعًا كاملًا:

(أ) 📖 $x^2 + 14x + a$

(ب) 📖 $x^2 - ax + 64$

(جـ) $4x^2 + 44xy + ay^2$

(د) $a^2x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{16}$

تعلم 2 تحليل الفرق بين مربعين:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

أى أن: الفرق بين مربعى كميتين = مجموع الكميتين × الفرق بينهما

مثال 6 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $x^2 - 1$ | 2 $25x^2 - 36y^2$ | 3 $x^2y^2 - 4$ | 4 $\frac{9}{49}a^2 - \frac{4}{25}$

الحل

1 $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

2 $25x^2 - 36y^2 = (5x + 6y)(5x - 6y)$

3 $x^2y^2 - 4 = (xy + 2)(xy - 2)$

4 $\frac{9}{49}a^2 - \frac{4}{25} = \left(\frac{3}{7}a + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}a - \frac{2}{5}\right)$

مثال 7 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $4x^3 - 9x$ | 2 $\frac{1}{3}x^2 - 3$ | 3 $16x^4 - y^4$ | 4 $16x^8 - 8x^4 + 1$

الحل

1 $4x^3 - 9x = x(4x^2 - 9)$
$= x(2x + 3)(2x - 3)$

لاحظ أن: "ع.م.أ" هو x

2 $\frac{1}{3}x^2 - 3 = \frac{1}{3}(x^2 - 9) = \frac{1}{3}(x + 3)(x - 3)$

لاحظ أن: $3 \div \frac{1}{3} = 9$

3 $16x^4 - y^4 = (4x^2 - y^2)\ (4x^2 + y^2)$

$(4x^2 + y^2)$ لا يحلل فى R

$= (2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2)$

4 $16x^8 - 8x^4 + 1 = (4x^4 - 1)^2 = \left[(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)\right]^2 = (2x^2 - 1)^2(2x^2 + 1)^2$

مثال 8 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $32x^3(3a + b) - 50x(3a + b)$ | 2 $100 - (a + b)^2$

الحل

1 $32x^3(3a + b) - 50x(3a + b) = 2x(3a + b)(16x^2 - 25)$
$= 2x(3a + b)(4x - 5)(4x + 5)$

2 $100 - (a + b)^2 = [10 - (a + b)][10 + (a + b)]$
$= (10 - a - b)(10 + a + b)$

س؟ سؤال 3

حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $x^2 - 9$ | 2 $1 - 100x^2y^2$ | 3 $(x + y)^2 - 4$

4 $\frac{1}{2}x^2 - 2$ | 5 $16y^4 - 72y^2 + 81$ | 6 $(a - b)^2 - c^2$

مثال 9 استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتي:

1 $(87)^2-(13)^2$ | 2 $(6.4)^2-(3.6)^2$ | 4 $(999)^2-1$



الحل

1 $(87)^2-(13)^2 = (87-13)(87+13)$
$= 74 \times 100 = 7400$

2 $(6.4)^2-(3.6)^2 = (6.4-3.6)(6.4+3.6)$
$= 2.8 \times 10 = 28$

3 $(999)^2-1 = (999-1)(999+1)$
$= 998 \times 1000 = 998000$

مثال 10

1 إذا كان: $a+b=5$ ، $a-b=4$ فأوجد القيمة العددية للمقدار a^2-b^2

2 إذا كان: $a^2-b^2=12$ ، $b-a=-3$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $a+b$

الحل

1 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=(4)(5)=20$

2 $\because\ b-a=-3$ $\quad \therefore\ a-b=3$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$12 = (3)(a+b)$ $\quad \therefore\ a+b=\frac{12}{3}=4$

مثال 11

توصف صيغة فرق الضغط P أعلى وأسفل جناح طائرة بالصيغة:

$$P=\frac{1}{2}dv^2-\frac{1}{2}du^2$$

حيث d هي كثافة الهواء ، v هي سرعة الهواء المار أعلى الجناح ، u هي سرعة الهواء المار أسفله.

اكتب هذه الصيغة في صورة حاصل ضرب كثيرات حدود أولية.



الحل

► $P=\frac{1}{2}dv^2-\frac{1}{2}du^2=\frac{1}{2}d\left(v^2-u^2\right)=\frac{1}{2}d\,(v-u)\,(v+u)$

س؟ سؤال 4

1 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

(أ) $16x^2-9$ | (ب) $y^2-\frac{1}{9}$ | (جـ) $(a-2b)(a+2b)-5b^2$

2 استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتي:

(أ) $(55)^2-(45)^2$ | (ب) $(99)^2-1$

3 (أ) إذا كان: $x-y=3$ ، $x+y=7$ فأوجد قيمة المقدار x^2-y^2

(ب) إذا كان: $2x-3y=5$ ، $4x^2-9y^2=115$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $2x+3y$

تعلم 3 تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

مثل الإشارة — عكس الإشارة — دائمًا موجبة

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثل الإشارة — عكس الإشارة — دائمًا موجبة

مثال 12 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $x^3 + 1$ | 2 $m^3 - 343n^3$ | 3 $27 - a^3b^3$ | 4 $8x^6 + 27y^3$

الحل

1 ▸ $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

2 ▸ $m^3 - 343n^3 = (m - 7n)(m^2 + 7mn + 49n^2)$

3 ▸ $27 - a^3b^3 = (3 - ab)(9 + 3ab + a^2b^2)$

4 ▸ $8x^6 + 27y^3 = (2x^2 + 3y)(4x^4 - 6x^2y + 9y^2)$

مثال 13 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $\frac{1}{2}x^4 - 4x$ | 2 $(a + b)^3 - a^3$ | 3 $64x^6 - y^6$

الحل

1 ▸ $\frac{1}{2}x^4 - 4x = \frac{1}{2}x(x^3 - 8) = \frac{1}{2}x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

2 ▸ $(a + b)^3 - a^3 = [(a + b) - a][(a + b)^2 + a(a + b) + a^2]$

$= b(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + ab + a^2)$

$= b(3a^2 + 3ab + b^2)$

3 ▸ $64x^6 - y^3 = (4x^2 - y)(16x^4 + 4x^2y + y^2)$

▸ $64x^6 - y^6 = (8x^3 - y^3)(8x^3 + y^3) = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

لاحظ أن

إذا كانت كثيرة الحدود ممكن أن تحلل فرق بين مربعين أو فرق بين مكعبين نبدأ أولًا بتحليل الفرق بين المربعين.

س؟ سؤال 5

حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $x^3 - 27$ | 2 $1 + 512x^3y^3$ | 3 $5x^5 - 320x^2$

4 $27x^3 - \frac{1}{64}$ | 5 $c^3 + \frac{1}{8}$ | 6 $a^3b^3 + \frac{1}{216}$

مثال 14 أجب عما يأتى:

1 إذا كان: $x^3 + y^3 = 24$ ، $x + y = 3$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $x^2 - xy + y^2$

2 إذا كان: $x - y = 3$ ، $xy = 1$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $x^3 - y^3$

الحل

1

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$24 = 3 \quad (x^2 - xy + y^2)$

$\therefore x^2 - xy + y^2 = \frac{24}{3} = 8$

2

$\because x - y = 3$ (بتربيع الطرفين) $\therefore (x - y)^2 = 9$ $\therefore x^2 - 2xy + y^2 = 9$

$\because xy = 1$ $\therefore x^2 + y^2 - 2(1) = 9$ $\therefore x^2 + y^2 = 9 + 2 = 11$

$\because x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$= (3)(11 + 1) = (3)(12) = 36$

مثال 15 أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية فى R :

1 $x^2 + 16 = -8x$ | 2 $2x^3 = 18x$

الحل

1

$\because x^2 + 16 = -8x$ $\therefore x^2 + 8x + 16 = 0$

$\therefore (x + 4)^2 = 0$ $\therefore x + 4 = 0$ $\therefore x = 0 - 4 = -4 \in R$

∴ مجموعة الحل = $\{-4\}$

2

$\because 2x^3 = 18x$ $\therefore 2x^3 - 18x = 0$

$\therefore 2x(x^2 - 9) = 0$

$2x(x - 3)(x + 3) = 0$

$2x = 0$	$x - 3 = 0$	$x + 3 = 0$
$x = 0 \in R$	$x = 3 \in R$	$x = -3 \in R$

∴ مجموعة الحل = $\{0 , 3 , -3\}$

س؟ سؤال 6

1 إذا كان: $y^3 - a = (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ فأوجد قيمة a

2 مستطيل مساحته تساوى $(x^3 + 8)$ وحدة مربعة (حيث $x \neq -2$)

وكان عرض المستطيل يساوى $(x + 2)$ وحدة طول، أوجد طول المستطيل.

3 أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية فى R :

(أ) $x^2 - 4x = -4$ | (ب) $2x^4 = 54x$

تحليل الحالات الخاصة (Factorizing Special Cases)

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل ▲

أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً: تحليل ثلاثية الحدود التى تُمثل مربعًا كاملاً:

1 بين أيًا من كثيرات الحدود الآتية تمثل مربعًا كاملًا، وأيها ليست مربعًا كاملًا، ثم حلل كثيرة الحدود التي على صورة مربع كامل:

1 $y^2 - 24y + 144$ 2 $x^2 - 12x + 9$ 3 $4a^2 - 44a + 121$

4 $9n^2 + 49 + 42n$ 5 $25a^2 - 120ab + 144b^2$ 6 $x^2 - x + \frac{1}{4}$

7 $\frac{1}{4}x^2 - x + 4$ 8 $0.01x^2 - 0.2x + 1$

2 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $x^2 - 2x + 1$ 2 $9y^2 + 12y + 4$ 3 $25a^2 - 10a + 1$

4 $9n^2 + 6nm + m^2$ 5 $4x^2 - 4xy + y^2$ 6 $36 - 60x + 25x^2$

7 $b^2 - 14b + 49$ 8 $9x^2 + 6x + 1$ 9 $4a^2 - 44a + 121$

10 $18x^2 - 12x + 2$ 11 $6x^4 - 12x^2y^2 + 6y^4$ 12 $20ay^2 - 60ay + 45a$

13 $24x + 24x^2 + 6x^3$ 14 $(a-b) + 2x(a-b) + x^2(a-b)$

3 أوجد قيمة K التي تجعل كلًّا مما يأتي مُربعًا كاملًا:

1 $x^2 + Kx + 64$ 2 $x^2 + 20x + K$ 3 $25x^2 + Kx + 49$

4 $x^2 + 8x + K$ 5 $x^2 - 18x + K$ 6 $K^2x^2 - 4x + 16$

4 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 إذا كان: $a^2 + 2ab + b^2 = 16$ ، فما قيمة $a + b$ ؟ ....

(أ) ± 1 (ب) ± 2 (جـ) ± 4 (د) ± 8

2 إذا كانت كثيرة الحدود $(4x^2 + Kx + 1)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة K ؟ ....

(أ) ± 1 (ب) ± 2 (جـ) ± 4 (د) ± 8

3 إذا كانت كثيرة الحدود $(x^2 + 14x + b)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة b ؟ ....

(أ) 2 (ب) 7 (جـ) 14 (د) 49

4 إذا كانت كثيرة الحدود $(Kx^2 - 12x + 9)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة K ؟ ....

(أ) 4 (ب) ± 4 (جـ) 2 (د) ± 2

5 إذا كان: $\frac{1}{4} + 3x + a$ ، مربعًا كاملًا، فما قيمة a ؟ ....

(أ) 9 (ب) $\frac{9}{4}x^2$ (جـ) $9x^2$ (د) $4x^2$

5 حل كلًّا من المعادلات الآتية في R:

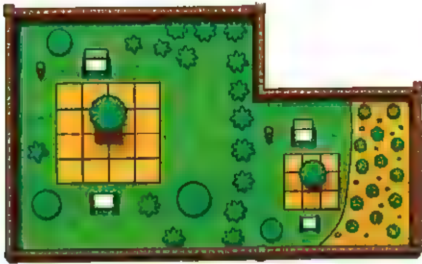
1 $4x^2+24x+36=0$
2 $x^2-4x+4=25$
3 $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0$
4 $x^2-6x+9=16$
5 $x^2+2x+1=16$
6 $4x^2+1=4x$
7 $49x^2+16=56x$

6 استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كلٍّ مما يأتي:

1 $(87)^2+2\times13\times87+(13)^2$
2 $(7.3)^2+2\times7.3\times2.7+(2.7)^2$
3 $(20.7)^2-1.4\times20.7+(0.7)^2$
4 $(997)^2+6\times997+9$

7 هندسة: مُربع مساحته $(4x^2-12x+k)$ سم^2، ويفرض أن طول ضلع المُربع عدد نسبي، فأوجد قيمة K؟ ثم احسب طول ضلع المُربع إذا كان $x=5$

8 زراعة: حديقة تتكون من قطعتي أرض متجاورتين، الكُبرى على شكل مُربع مساحته $(25x^2+10x+1)$ م^2، والصغرى على شكل مُربع مساحته $(4x^2+4x+1)$ م^2 ويُراد عمل سور حول الحديقة. أوجد طول السور بدلالة x، ثم أوجد محيط الحديقة إذا كانت x تُساوي 10 م.



ثانيًا: تحليل الفرق بين مُربعين:

9 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $32x^4-2y^4$
2 x^4-81
3 $3n^2-48$
4 $25-9x^2$
5 $2x^5-98x^3$
6 x^4-81
7 a^2-4
8 $625x^2-81b^2$
9 $n^2-m^2\ell^4$
10 $x^{100}-1$
11 $8x^2-50$
12 $27x^3-48xy^6$
13 $\frac{1}{3}y^2-3$
14 $3x^2-\frac{3}{16}$
15 $(x+1)^2-(x-1)^2$
16 $9(y-1)^2-25(y+1)^2$
17 $1-(x-1)^2$
18 $(x+y+5)^2-(x-y-5)^2$

10 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 إذا كان: $x^2-b^2=(x-4)(x+4)$ ، فما قيمة b؟ ....

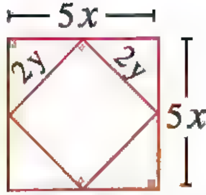
(أ) ±2 (ب) ±4 (جـ) ±8 (د) ±16

2 إذا كان: $ax^2-b=(3x-2)(3x+2)$ ، فما قيمة $a+b$؟ ....

(أ) -13 (ب) 13 (جـ) -5 (د) 5

3 إذا كان: $x^2 - y^2 = -16$ ، $x - y = -2$ ، فما الوسط الحسابي للعددين x ، y ؟ ....

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 8 (د) 16



4 أي العبارات الآتية تُمثل مساحة المنطقة المُلونة بالشكل المُقابل؟

(أ) $5x^2 - 2y^2$ (ب) $25x - 4y$

(جـ) $(5x - 2y)^2$ (د) $(5x - 2y)(5x + 2y)$

11 حل كل من المعادلات الآتية في R :

1 $4x^2 = 25$ 2 $17 - 78x^2 = 0$ 3 $x^2 - \frac{1}{36} = 0$

4 $x^3 = 25x$ 5 $16 - \frac{1}{4}x^2 = 0$ 6 $2x^3 - 2x = 0$

12 استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كلٍّ مما يأتي:

1 $(77)^2 - (23)^2$ 2 $(87)^2 - (86)^2$ 3 $(95)^2 - 25$ 4 105×95

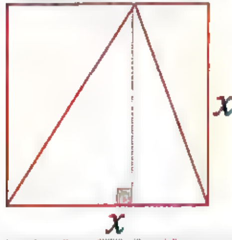
13 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $x^2y^2 - 4x^2$ 2 $81m^8 - 1$

3 $48a^4b^8 - 243$ 4 $16x^4y^8 - 81Z^4$

14 هندسة: إذا كانت مساحة المنطقة المُظللة بالشكل المُقابل تُساوي 72 سم^2 ،

فأجد طول ضلع المُربع باستخدام التحليل.



15 اكتشف الخطأ: بفرض أن: a ، b أعداد حقيقية، a = b ،

a ≠ 0 ، b ≠ 0 اكتشف الخطأ بأي خطوة من الخطوات من

(1) إلى (8):

مُعطَى	1 $a = b$
بضرب طرفي المُعادلة في a	2 $a^2 = ab$
بطرح b^2 من طرفي المُعادلة	3 $a^2 - b^2 = ab - b^2$
بتحليل طرفي المعادلة	4 $(a + b)(a - b) = b(a - b)$
بقسمة طرفي المعادلة على $(a - b)$	5 $a + b = b$
بالتعويض عن $a = b$ (مُعطًى)	6 $a + a = a$
بجمع الحدود المُتشابهة	7 $2a = a$
بقسمة طرفي المعادلة على a	8 $2 = 1$

16 إذا كان: $xy = 3$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار: $(x + y)^2 - (x - y)^2$

ثالثًا: تحليل مجموع مُكعبين والفرق بينهما:

17 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $x^3 - 1$	2 $125x^3 + \frac{1}{8}$	3 $\frac{1}{8}a^3 - 8b^3$
4 $x^3y^3 - 27$	5 $a^6 - 64b^6$	6 $\frac{1}{3}x^3 - 9$
7 $x^3y - 27y^4$	8 $(x+5)^3 - 125$	9 $(m+2n)^3 - 8n^3$
10 $(x+5)^3 + (x-5)^3$	11 $(x-y) + (x-y)^4$	12 $x^6 - 7x^3 - 8$

18 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 $x^3 + y^3 = (\text{..............})(x^2 - xy + y^2)$

(أ) $(x-y)$ (ب) $(x+y)$ (جـ) (x^2-y^2) (د) (x^2+y^2)

2 إذا كان: $x^3 + y^3 = 20$ ، $x^2 - xy + y^2 = 4$ ، فما قيمة $2x + 2y$ ؟ ....

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

3 إذا كان: $ax^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + bx + 9)$ ، فما قيمة ab ؟ ....

(أ) 6 (ب) 12 (جـ) 24 (د) 48

4 $(x-y)(x+y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = \text{................}$

(أ) $x^3 - y^3$ (ب) $x^3 + y^3$ (جـ) $x^6 - y^6$ (د) $x^6 + y^6$

5 إذا كان: $(x^2 - 2xy + y^2) = 25$ ، $(x^2 + xy + y^2) = 7$ ، فما قيمة $(x^3 - y^3)$ ؟

(أ) ± 35 (ب) 12 (جـ) ± 52 (د) 7

19 إذا كان: $a - b = 3$ ، $ab = 10$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار: $a^3 - b^3$

20 هندسة: إذا كان حجم متوازى مستطيلات هو $(x^4 - 625)$ وحدة مُكعبة باستخدام التحليل كيف يمكنك إيجاد الأبعاد الثلاثة المُمكنة له؟

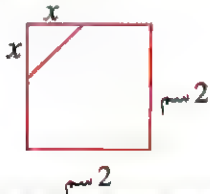


21 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 9$ 2 $(x + 3)^4 - x - 3$

22 مُربع مساحته $(81 - 90x + 25x^2)$ سم²، فإذا كان x هو عدد صحيح موجب، فما هو أصغر محيط ممكن لهذا المربع؟

23 فى الشكل المُقابل:



1 اكتب مقدارًا جبريًّا يُعبر عن مساحة المنطقة المُظللة (A)

2 إذا كانت مساحة نفس المنطقة المُظللة تُساوى $\frac{7}{9}$ مساحة المربع، فأوجد قيمة x .

24 إذا كانت مساحة المنطقة المُظللة بين المربعين هى 17 سم²، وكان مجموع مُحيطى المُربعين هو 68 سم. كم يساوى $(x - y)$ ؟



1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 إذا كانت كثيرة الحدود $(x^2 - 14x + K)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة K ؟ ....

(أ) 2 (ب) 7 (جـ) 14 (د) 49

2 إذا كان: $x = 6$ ، $y = 4$ ، فما قيمة $x^2 - 2xy + y^2$ ؟ ....

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 10 (د) 100

3 مجموعة حل المعادلة: $2P^2 - P - 3 = 0$ في R هي ....

(أ) $\left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$ (ب) $\left\{\frac{2}{3}, -1\right\}$ (جـ) $\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$ (د) $\left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$

4 إذا كان: $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 + b$ ، فما قيمة 3b ؟ ....

(أ) 2 (ب) -2 (جـ) 24 (د) -24

5 .... $= (99)^2 + 2(99) + 1$

(أ) 100 (ب) 10000 (جـ) 410 (د) $(98)^2$

6 إذا كان: $a^2 + 2ab + b^2 = 25$ ، فما قيمة $a + b$ ؟

(أ) 25 (ب) -25 (جـ) ± 5 (د) 12.5

7 مستطيل مساحته $(25x^2 - 36y^2)$ سم^2 ، فإذا كان طول أحد بُعديه $(5x - 6y)$ سم ،
فإن طول البُعد الآخر هو .... سم.

(أ) $x + y$ (ب) $5x + 6y$ (جـ) $20x + 30y$ (د) $5x - 6y$

8 إذا كانت: $(x - y) = 3$ ، $(x^2 + xy + y^2) = 7$ فما قيمة $(x^3 - y^3)$ ؟ ....

(أ) 2 (ب) -7 (جـ) 12 (د) 21

---

2 أجب عما يأتي:

1 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

(أ) $a^2 + 18a + 81$ (ب) $20x^3 - 45x$

(جـ) $54x^3 + 16$ (د) $25x^2y^2 + 30x^2y + 9x^2$

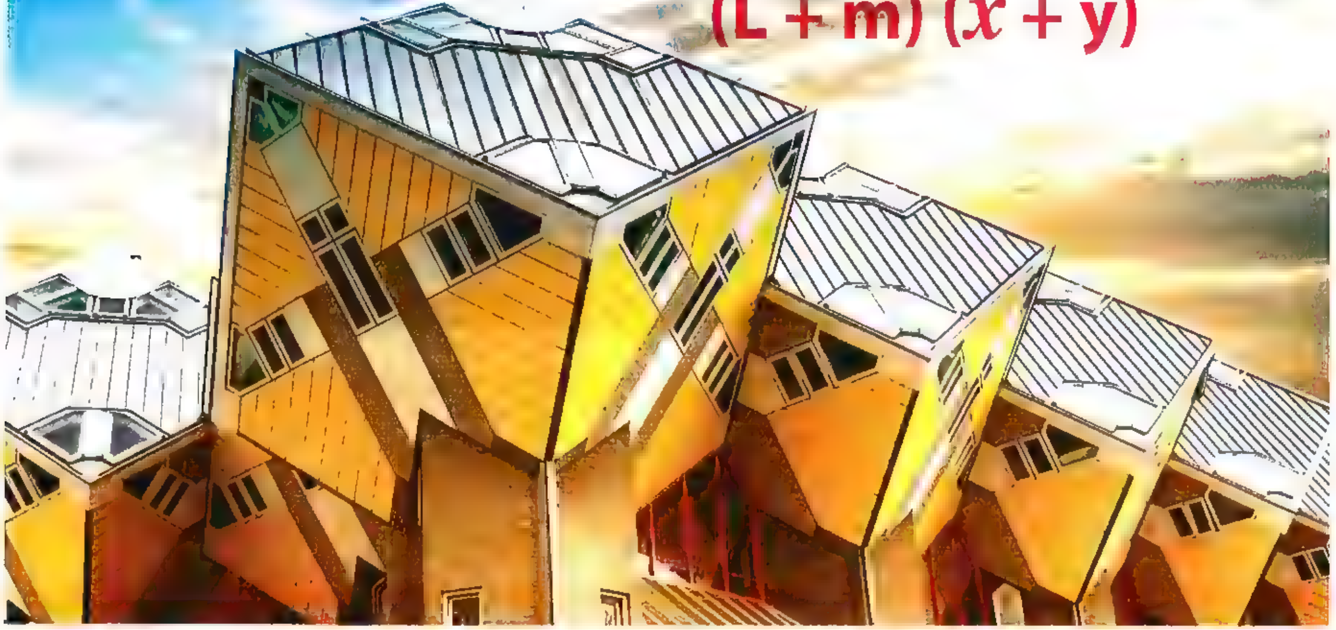
2 أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في R:

(أ) $121x = 49x^3$ (ب) $6x^2 = -4x$ (جـ) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} = 0$

3 متوازي أضلاع مساحته 60 سم^2 ، وطول قاعدته يزيد عن الارتفاع المناظر لها بمقدار 7 سم، فما ارتفاع متوازي الأضلاع؟

ذاكر الدرس 4

التحليل بالتقسيم
(Factorizing by Grouping)





نواتج التعلم



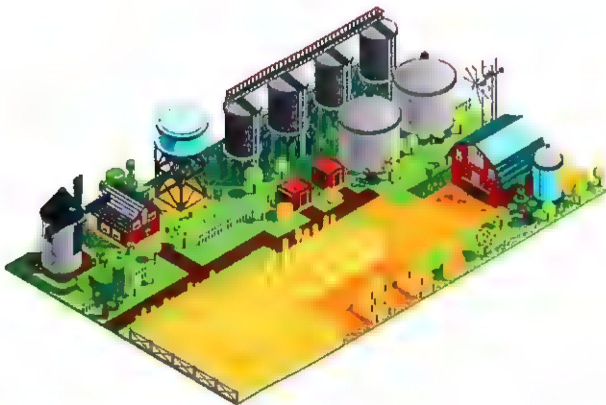
- يحلل الطالب كثيرة حدود عن طريق التقسيم.
- يعرف الطالب إكمال المربع.
- يستخدم الطالب إكمال المربع فى التحليل وحل المعادلات.
- يستخدم الطالب التحليل بالتقسيم فى حل مشكلات حياتية.

مفردات أساسية

- التحليل بالتقسيم (Factorizing by Grouping)
- إكمال المربع (Completing the Square)



فكر وناقش



- مزارع لديه مزرعة مستطيلة الشكل مساحتها $(3x^3 - 6x^2 + 4x - 8)$ كم^2

كيف يمكن تحديد أبعاد ممكنة لهذه المزرعة؟

- فى هذا الدرس سوف نتعلم كيفية التحليل بالتقسيم، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم 1 التحليل بالتقسيم:

يمكن تحليل كثيرة حدود مكونة من أربعة حدود باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى

- نقسم كثيرة الحدود إلى ثنائيتى حدود، بحيث نستطيع تحليل كل ثنائية حدود، ثم نخرج ثنائية الحدود المكررة كعامل مشترك.

مثال 1 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $Lx+mx+Ly+my$

2 $xy+7y+x+7$

3 a^2+3a-b^2+3b

4 $2x^2y+24x+6x^2+8xy$

الحل

1

$Lx+mx+Ly+my$

دمج: $=(Lx+mx)+(Ly+my)$

تحليل ثنائية الحدود: $=x(L+m)+y(L+m)$

بإخراج (ع.م.أ)

إخراج $(L+m)$ كعامل مشترك: $=(L+m)(x+y)$

حل آخر

$Lx+mx+Ly+my$

إبدال ودمج: $=(Lx+Ly)+(mx+my)$

تحليل ثنائية الحدود: $=L(x+y)+m(x+y)$

بإخراج (ع.م.أ)

إخراج $(x+y)$ كعامل مشترك: $=(x+y)(L+m)$

2

$xy+7y+x+7$

$=(xy+7y)+(x+7)$

$=y(x+7)+(x+7)$

$=(x+7)(y+1)$

$(x+7)$ ثنائية حدود أولية أى لا يمكن تحليلها.

حل آخر

$xy+7y+x+7$

$=(xy+x)+(7y+7)$

$=x(y+1)+7(y+1)$

$=(y+1)(x+7)$

3

a^2+3a-b^2+3b

$=(a^2-b^2)+(3a+3b)$

$=(a+b)(a-b)+3(a+b)$

$=(a+b)(a-b+3)$

تحليل ثنائية حدود فرق بين مربعين

تحليل ثنائية حدود بإخراج (ع.م.أ)

لاحظ أن

إذا تم التقسيم كالتالى:

a^2+3a-b^2+3b

$=(a^2+3a)+(-b^2+3b)$

$=a(a+3)-b(b-3)$

فلا يوجد عامل مشترك

وبالتالى نحاول التقسيم بترتيب آخر.

4

$2x^2y+24x+6x^2+8xy$

$=2x[xy+12+3x+4y]$

$=2x[(xy+3x)+(12+4y)]$

$=2x[x(y+3)+4(3+y)]$

$=2x(y+3)(x+4)$

إخراج (ع.م.أ) بين الحدود

لاحظ أن $2x$ عامل مشترك بين الحدود؛ لذا ابدأ بإخراج العامل المشترك، ثم قسم المقدار.

لاحظ أن $y+3=3+y$

لاحظ أن

- يمكن تحليل ثلاثية الحدود التى على الصورة: $ax^2 + bx + c$
حيث $(a \neq 1)$ باستخدام التحليل بالتقسيم كما يلى:

1 أوجد عاملين حاصل ضربهما (ac) ومجموعهما (b).
2 أعد كتابة (bx) فى صورة ناتج جمع هذين العاملين.
3 استخدم التحليل بالتقسيم.



مثال 2 حلل كلًّا مما يأتى باستخدام التحليل بالتقسيم:

1 $3x^2 + 13x + 4$ 2 $5x^2 - 12x + 4$

الحل

1 $a = 3 \quad b = 13 \quad c = 4$

◂ نوجد عددين حاصل ضربهما ac أى حاصل ضربهما 12 (لأن $ac = 3 \times 4 = 12$ ◂)
ومجموعهما b أى مجموعهما 13 ∴ العددان هما 1 , 12

◂ نعيد كتابة $13x$ فى صورة $(12x + x)$ ثم نستخدم التحليل بالتقسيم كما يلى:

$$3x^2 + 13x + 4 = 3x^2 + 12x + x + 4$$
$$= (3x^2 + 12x) + (x + 4)$$
$$= 3x(x + 4) + (x + 4)$$
$$= (x + 4)(3x + 1)$$

2 نوجد عددين حاصل ضربهما ac أى حاصل ضربهما 20 (لأن: $ac = 5 \times 4 = 20$ ◂)
ومجموعهما b أى مجموعهما -12 ∴ العددان هما -2 , -10

◂ نعيد كتابة $-12x$ فى صورة $(-10x - 2x)$ ثم نستخدم التحليل بالتقسيم كما يلى:

$$5x^2 - 12x + 4 = 5x^2 - 10x - 2x + 4$$
$$= (5x^2 - 10x) + (-2x + 4)$$
$$= 5x(x - 2) - 2(x - 2)$$
$$= (x - 2)(5x - 2)$$

س؟ سؤال 1

حلل كلًّا مما يأتى باستخدام التحليل بالتقسيم:

1 $5x + 5y + xL + yL$
2 $ax - 7a + 3x - 21$
3 $2x^2 - x - 28$
4 $6x^2 + 19x + 15$

مثال 3 أجب عما يأتي:

إذا كان: $a + b = 5$ ، $x + y = 7$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار $ax + by + ay + bx$

الحل

$$ax + by + ay + bx = (ax + ay) + (by + bx)$$
$$= a(x + y) + b(y + x)$$
$$= (x + y)(a + b) = 7 \times 5 = 35$$

◄ وبالتالي فإن: القيمة العددية للمقدار $ax + by + ay + bx$ تساوى 35

الطريقة الثانية

- يتم تقسيم كثيرة الحدود إلى ثلاثية حدود، تمثل مربعًا كاملًا والحد الرابع يجب أيضًا أن يكون مربعًا كاملًا، بحيث يتم تحليل كثيرة الحدود الأصلية كفرق بين مربعين.

مثال 4 حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

2 $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 16$

3 $x^2 + 4x - y^2 + 4$

4 $1 - a^2 + 4ab - 4b^2$

الحل

1

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2$$

ثلاثية حدود مربع كامل ، مربع كامل

$$= (a + b)^2 - c^2$$
$$= (a + b - c)(a + b + c)$$

2

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 16 = (9x^2 + 12xy + 4y^2) - 16$$
$$= (3x + 2y)^2 - 16$$
$$= (3x + 2y - 4)(3x + 2y + 4)$$

3

(إبدال)

$$x^2 + 4x - y^2 + 4 = x^2 + 4x + 4 - y^2$$
$$= (x^2 + 4x + 4) - y^2$$
$$= (x + 2)^2 - y^2$$
$$= (x + 2 - y)(x + 2 + y)$$

4

$$1 - a^2 + 4ab - 4b^2 = 1 + (-a^2 + 4ab - 4b^2)$$
$$= 1 - (a^2 - 4ab + 4b^2)$$

أخذ (-1) عاملًا مشتركًا

$$= 1 - (a - 2b)^2$$
$$= [1 - (a - 2b)][1 + (a - 2b)]$$
$$= (1 - a + 2b)(1 + a - 2b)$$

س؟ سؤال 2

حلل كلًّا مما يأتي تحليلًا تامًّا:

1 $x^2 + y^2 - 64 + 2xy$

2 $4m^2 - n^2 + 10nk - 25k^2$

تعلم 2 التحليل بإكمال المربع:

- إكمال المربع: هو عملية إضافة حد جبرى إلى ثنائية حدود لتصبح ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

يمكن أن يتم إكمال المربع بإحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى

◂ بإضافة (الحد الأوسط) = ($\pm 2\sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$)

فمثلًا:

$x^2 + 9$ يضاف إليها $(\pm 2\sqrt{x^2} \times \sqrt{9}) = \pm 6x$

فيكون $(x^2 \pm 6x + 9)$ مربعًا كاملًا أى يكتب على الصورة $(x \pm 3)^2$

الطريقة الثانية

◂ بإضافة (الحد الثالث) = $\dfrac{\text{مربع الحد الأوسط}}{\text{الحد الأول} \times 4}$

فمثلًا:

$x^2 + 8x$ يضاف إليها $\dfrac{(8x)^2}{(x^2 \times 4)} = \dfrac{64x^2}{4x^2} = 16$

فيكون $(x^2 + 8x + 16)$ مربعًا كاملًا أى يكتب على الصورة $(x + 4)^2$

تحليل كثيرات حدود باستخدام طريقة إكمال المربع:

- لتحليل كثيرات الحدود التى تشتمل على حدين على الأقل كل منهما مربع كامل وأسس متغيراتها تكون 4 أو مضاعفاتها نستخدم طريقة إكمال المربع، وذلك بإضافة وطرح (ضعف حاصل ضرب جذرى الحدين المربعين)؛ حتى لا تؤثر فى قيمة كثيرة الحدود، ثم يتم التحليل بالتقسيم.

مثال 5 حلل ثنائية الحدود: $x^4 + 64$

الحل

◂ بإضافة وطرح: $2\sqrt{x^4} \times \sqrt{64} = 16x^2$

$\therefore x^4 + 64 = x^4 + 64 + 16x^2 - 16x^2$

$= (x^4 + 16x^2 + 64) - (16x^2)$ إبدال ودمج

$= (x^2 + 8)^2 - 16x^2$

$= (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$

$= (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8)$



مثـال 6 حلل كلًّا مما يأتى:

1 $9x^4 + 2x^2 + 1$

2 $64 a^4 + 81 b^4$

1 بإضافة وطرح: $6x^2 = 2\sqrt{9x^4} \times \sqrt{1}$

$\therefore\ 9x^4 + 2x^2 + 1 + 6x^2 - 6x^2$

$= 9x^4 + 6x^2 + 1 + 2x^2 - 6x^2$

$= (9x^4 + 6x^2 + 1) - 4x^2$

$= (3x^2 + 1)^2 - 4x^2$

$= (3x^2 + 1 - 2x)(3x^2 + 1 + 2x)$

$= (3x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 1)$

2 بإضافة وطرح: $144 a^2 b^2 = 2\sqrt{64 a^4} \times \sqrt{81 b^4}$

$\therefore\ 64a^4 + 81b^4 + 144 a^2 b^2 - 144 a^2 b^2$

$= (64 a^4 + 144 a^2 b^2 + 81 b^4) - 144 a^2 b^2$

$= (8 a^2 + 9b^2)^2 - 144 a^2 b^2$

$= (8a^2 + 9b^2 - 12 ab)(8a^2 + 9b^2 + 12 ab)$

$= (8a^2 - 12 ab + 9b^2)(8a^2 + 12 ab + 9b^2)$

حل المعادلات:

مثـال 7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1 $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$

2 $x^2 - 8x + 9 = 0$

الحـل

1

$(x^3 + x^2) + (-9x - 9) = 0$

$x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - 9) = 0$

$(x + 1)(x - 3)(x + 3) = 0$

إما $x + 1 = 0$ أو $x - 3 = 0$ أو $x + 3 = 0$

ومنها $x = -1$ ومنها $x = 3$ ومنها $x = -3$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-1, 3, -3\}$

2 $x^2 - 8x + 9 = 0$

لاحظ: لا يمكن تحليل ثلاثية حدود، ولذلك نستخدم إكمال المربع.

بإضافة (الحد الثالث) = $\frac{(-8x)^2}{(4)(x^2)} = \frac{64x^2}{4x^2} = 16$ إلى طرفى المعادلة

$x^2 - 8x = -9 \longrightarrow x^2 - 8x + 16 = -9 + 16$

$(x - 4)^2 = 7 \longrightarrow x - 4 = \pm\sqrt{7}$

$\therefore\ x = 4 \pm \sqrt{7}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{4 + \sqrt{7}\ ,\ 4 - \sqrt{7}\}$

لاحظ أن

- لإيجاد مجموعة حل المعادلات التربيعية التى لا تستطيع تحليلها باستخدام تحليل ثلاثية حدود:
  نستخدم طريقة إكمال المربع، ونكمل $a x^2 + bx$، أى: نضيف الحد الثالث إلى طرفى المعادلة.

حل مشكلات حياتية باستخدام التحليل بالتقسيم:

مثال 8

متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $(x-1)$ م وارتفاعه x م ،
إذا كان حجم متوازى المستطيلات يساوى 2م^3 ، فأوجد أبعاده:

الحل

∵ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$\therefore (x-1)^2 (x) = 2$

$(x^2-2x+1)(x) = 2$

$\therefore x^3-2x^2+x-2=0$

$\therefore (x^3-2x^2)+(x-2)=0$

$\therefore x^2(x-2)+(x-2)=0$

$\therefore (x-2)(x^2+1)=0$

$\therefore x-2=0 \longrightarrow \therefore x=2$

حيث $x^2+1 \geq 1$ لكل $x \in R$

∴ أبعاد متوازى المستطيلات هى 1م، 1م ، 2م

مثال 9

خزان مياه على شكل متوازى مستطيلات حجمه $9x^4+6x^3+9x^2+6x$ قدم مكعب.
أوجد الأبعاد الممكنة له بدلالة x ، ثم أوجد القيمة العددية للأبعاد عند $x=1$

الحل

$$9x^4+6x^3+9x^2+6x = 3x(3x^3+2x^2+3x+2)$$
$$= 3x[(3x^3+2x^2)+(3x+2)]$$
$$= 3x[x^2(3x+2)+(3x+2)]$$
$$= 3x(3x+2)(x^2+1)$$

∴ الأبعاد الممكنة هى: (x^2+1) قدم ، $(3x+2)$ قدم ، $(3x)$ قدم

القيمة العددية للأبعاد عند $x=1$ هى 2 قدم ، 5 قدم ، 3 قدم.

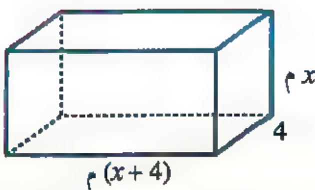
س؟ سؤال 3

1 حلل تحليلًا تامًا:

(أ) x^4+9x^2+81 (ب) $4x^2(4x^2-7y^2)+y^4$

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2-2x-4=0$ فى R

3 إذا كان حجم الصندوق المقابل 128 م^3 ، فأوجد أبعاده.



أسئلة الكتاب المدرسي

التحليل بالتقسيم:

1 حلل كلًا مما يأتي تحليلًا تامًا:

1 $5x+5y+xz+yz$

2 $ax-7a+4x-28$

3 $ax+bx+b+a$

4 $ax+by+bx+ay$

5 $x^3-2+2x-x^2$

6 $x^2-4y^2+5x-10y$

7 y^3-y^2-9y+9

8 $11x^3-6x^2+11x-6$

9 $x^2-y^2-6x-6y$

10 $a^3+b^3-5a-5b$

11 $am-an+n-m$

12 $x^3-3x^2-18+6x$

13 x^3-3x^2-6x+8

14 $4x^2-12xy+9y^2-49$

15 x^2-a^2-2x+1

16 $16x^2-25a^2+y^2+8xy$

17 $20x^3-100x^2+25x-125$

18 $1-x^2-4xy-4y^2$

2 حلل كلًا من ثلاثيات الحدود الآتية باستخدام التحليل بالتقسيم:

1 $2x^2+5x+3$

2 $2x^2+13x+15$

3 $2x^2+x-10$

4 $4x^2-7x-2$

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $x^2-ax+bx-ab=$ ....

(أ) $(x-a)(x-b)$ (ب) $(x-a)(x+b)$ (جـ) $(x+a)(x-b)$ (د) $(x+a)(x+b)$

2 إذا كان: $x+b=5$ ، $x^2+a=12$ ، فما القيمة العددية للمقدار: $(x^3+bx^2+ax+ab)$؟

(أ) 7 (ب) 17 (جـ) 30 (د) 60

3 إذا كان: $z-y=6$ ، وكانت: $x(z-y)+L(z-y)=24$ ، فإن: $x+L=$ ....

(أ) 144 (ب) 4 (جـ) -4 (د) -144

4 إذا كان: $xy+5x+7y+35=(x+a)(y+b)$ ، فما قيمة: $a-b$؟

(أ) 2 (ب) -2 (جـ) 12 (د) -12

5 إذا كان: $a+b=3$ ، $x-y=4$ ، فإن: $a(x-y)-b(y-x)=$ ....

(أ) 7 (ب) -12 (جـ) 12 (د) -7

6 إذا كان: $x^3+5x^2-4x-20=(x+a)(x+b)(x+c)$ ، فما قيمة: $a+b+c$؟

(أ) 2 (ب) 5 (جـ) 7 (د) 9

4 إذا كان: $ax - bx + ay - by = 12$ ، وكان: $a - b = 3$

فأوجد (مبينًا خطوات الحل) القيمة العددية للمقدار: $x + y$

5 إذا كان: $ax - bx - by + ay = 15$ ، وكان: $x + y = 5$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار: $b - a$

6 إذا كان: $5ax - a - 10bx + 2b = 45$, $a - 2b = 5$ فأوجد قيمة: x

7 إذا كان: $2a + b = 9$ ، $a^2 - 5b = 17$ فما القيمة العددية للمقدار: $2a^3 + a^2b - 10ab - 5b^2$؟

8 إذا كان حجم متوازي مستطيلات هو $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x)$ قدم مكعب، فأوجد الأبعاد الممكنة لمتوازي المستطيلات بدلالة x ، ثم أوجد القيمة العددية للأبعاد عند: $x = 4$

9 إذا كان حجم الصندوق المقابل 12 وحدة مكعبة ، فأوجد أبعاده.



10 صورة يحيط بها إطار سُمكه x بوصة كما بالشكل.

إذا كانت مساحة الصورة $(4x^3 + 6x^2 + 2x + 3)$ بوصة مربعة،

فأوجد الأبعاد الممكنة للصورة والإطار معًا بدلالة x



إكمال المربع:

11 اختر الإجابة الصحيحة:

1 عند إكمال المربع للمقدار: $(x^2 + 9)$ نضيف إليه ....

(أ) $\pm 3x$ (ب) $\pm 6x$ (جـ) $\pm 9x$ (د) $\pm 12x$

2 يمكن تحليل المقدار $a^4 + 64$ بإكمال المربع بإضافة الحد .... ومعكوسه الجمعي إلى المقدار.

(أ) a^4 (ب) $16a^2$ (جـ) a^2 (د) 16

3 عند إكمال المربع للمقدار: $(x^2 + 12x)$ نضيف إليه ....

(أ) ± 9 (ب) ± 36 (جـ) 9 (د) 36

4 عند إكمال المربع للمقدار: $(x^4 + 4x^2 + 16)$ نضيف إليه ....

(أ) x^2 (ب) $16x^2$ (جـ) $8x^2$ (د) $4x^2$

5 $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - $ ....

(أ) x^2 (ب) $2x^2$ (جـ) $4x^2$ (د) $4x^4$

6 إذا كان: $(x^2 + 2x + 2)$ أحد عاملي المقدار $(x^4 + 4)$ ، فما العامل الآخر؟

(أ) $x^2 - 2x + 2$ (ب) $x^2 - 2x - 2$ (جـ) $x^2 + x + 2$ (د) $x^2 - x + 2$

12 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $x^4 + 4y^4$

2 $4m^4 + 1$

3 $64x^4 + y^4$

4 $81a^4 + 4b^4$

5 $a^4 + a^2b^4 + b^8$

6 $x^4 - 11x^2 + 1$

7 $16a^4 - 28a^2b^2 + 9b^4$

8 $k^5 + 5k^3 + 9k$

13 إذا كانت قيمة المقدار: $4a^4 + b^4 = 12$ ، وكان: $2a^2 + b^2 + 2ab = 4$ ،

فأوجد قيمة: $2a^2 + b^2 - 2ab$

14 أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى R:

1 $x^3 + x^2 - 4x = 4$

2 $x^3 - x^2 = 2 - 2x$

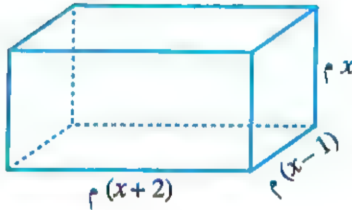
3 $x^5 - 3x^2 + x^3 = 3$

4 $x^2 + 12x + 15 = 0$

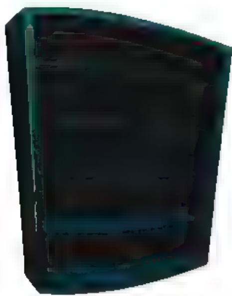
5 $x^2 + 6x = -7$

6 $4x^2 - 24x + 25 = 0$

15 قامت فاطمة بصناعة صندوق خشبى لزراعة النباتات على شكل متوازى مستطيلات، وأرادت أن تملأه بالتراب، أبعاده كالتالى: الطول: $(x + 2)$ متر، العرض: $(x - 1)$ متر ، الارتفاع (x) متر، إذا علمت أن حجم الصندوق يجب أن يكون 2 متر مكعب، **فأوجد أبعاده بالمتر.**



16 يريد سامى صنع صندوق خشبى على شكل متوازى مستطيلات لتخزين كتبه، الصندوق قاعدته مربعة الشكل، طول ضلع القاعدة: $(x - 2)$ قدم، الارتفاع: $(x + 1)$ قدم ، إذا كان حجم الصندوق يجب أن يساوى 4 أقدام مكعبة ليسع جميع الكتب، **فما أبعاد الصندوق؟**



تفكير إبداعى TIMSS

17 إذا كان: $a + b = 3$ فأوجد قيمة:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

18 حلل تحليلًا تامًّا: $x^8 - 16y^8$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود: $10x^2 - 25x^3 + 5x$ ؟

(أ) $10x$ (ب) $5x$ (جـ) $-10x$ (د) $-5x$

2 إذا كانت كثيرة الحدود $(kx^2 + 20x + 25)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k؟ ....

(أ) 9 (ب) 4 (جـ) 16 (د) 25

3 أى مما يلى يمثل تحليل كثيرة الحدود: $x^2 - x - 12$ ؟

(أ) $(x-4)(x+3)$ (ب) $(x+4)(x-3)$ (جـ) $(x-4)(x-3)$ (د) $(x+4)(x+3)$

4 المعكوس الضربى للعدد: $\sqrt{5} - 2$ ؟

(أ) $\sqrt{5} - 2$ (ب) $-\sqrt{5} - 2$ (جـ) $2 - \sqrt{5}$ (د) $\sqrt{5} + 2$

5 إذا كان: $x^2 + ax + 24 = (x+3)(x+b)$ ، فما قيمة: b - a ؟ ....

(أ) 3 (ب) 8 (جـ) -3 (د) 11

6 .... $= 5x - 30 + ax - 6a$

(أ) $(x+6)(a-5)$ (ب) $(x-6)(a-5)$ (جـ) $(x+6)(a+5)$ (د) $(x-6)(a+5)$

7 المقدار: $x^2 + kx - 18$ قابلًا للتحليل فإن قيمة k يمكن أن تكون ....

(أ) 6 (ب) 9 (جـ) 8 (د) 7

8 إذا كان: $a^2 - b^2 = 18$ ، $a + b = 6$ ، فإن: .... $b - a =$

(أ) 2 (ب) -2 (جـ) 3 (د) -3

9 عند إكمال المربع للمقدار: $(x^2 + 10x)$ نضيف إليه ....

(أ) ±100 (ب) ±25 (جـ) 100 (د) 25

---

2 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 (أ) $5y^2 - 7y + 2$ (ب) $24x^4 - 81x$

2 أوجد القيمة العددية باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر: $23 \times 66 + 23 \times 35 - 23$

3 حل المعادلة الآتية فى R: $-14x - 36 + 2x^2 = 0$

4 مستطيل مساحته $(a^3 + 125)$ سم^2 وعرضه $(a + 5)$ سم، أوجد طوله بدلالة a

5 إذا كان: $5x - 4y = 7$ ، $25x^2 - 16y^2 = 63$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار: $5x + 4y$

6 حلل بإكمال المربع المقدار: $4x^4 + 625y^4$

7 إذا كانت: $B =]3, \infty[$ ، $A = [-1, 4[$ ، فأوجد: $B - A$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت كثيرة الحدود: $(9x^2 + Kx + 49)$ مربعًا كاملًا فما قيمة K ؟

(أ) ± 7 (ب) ± 21 (جـ) ± 42 (د) ± 72

2 إذا كان $x^2 - 14x + 24 = (x - a)(x - b)$ فما قيمة: $a + b$

(أ) -10 (ب) -14 (جـ) 10 (د) 14

3 إذا كان $m - n = 5$ ، $x + y = 7$ فإن: $x(m - n) - y(n - m) = \dots\dots\dots$

(أ) 2 (ب) 12 (جـ) 35 (د) 70

4 $x^3 + y^3 = (\dots\dots\dots)(x^2 - xy + y^2)$

(أ) $(x - y)$ (ب) $(x + y)$ (جـ) $(x^2 - y^2)$ (د) $(x^2 + y^2)$

---

2 أكمل كلًّا مما يأتى بالإجابة الصحيحة:

1 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $16x^3 + 8x^2 - 32x$ هو ....

2 عند إكمال المربع للمقدار $(x^2 + 24x)$ نضيف ....

3 إذا كان $(m^2 + 4m + 8)$ أحد عاملى المقدار $(m^4 + 64)$ فإن العامل الآخر هو ....

4 إذا كان: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x + a)(x + b)(x + c)$ فإن: $(a \times b \times c)$ تساوى ....

---

3 أجب عن الأسئلة الآتية:

1 أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 6x = -8$ فى R

2 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

(أ) $3x^2 + 2x - 5$

(ب) $k^2 - 64m^2$

(جـ) $x^3 y^3 - 27$

3 متوازى أضلاع مساحته 60 سم^2 ، وطول قاعدته يزيد عن الارتفاع المناظر لها بمقدار 7 سم، فما ارتفاع متوازى الأضلاع؟

4 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

(أ) $x^2 - 6x - y^2 + 6y$

(ب) $8x^5 - 10x^3 y^2 + 2x y^4$

الوحدة الثالثة 3

الهندسة



دروس الوحــدة

الــــدرس الأول: التطابق (Congruence)

الــدرس الثانى: نظرية فيثاغورس وعكسها (Pythagoras' Theorem and its Converse)

الــدرس الثالث: تطبيقات التوازى (Applications of Parallelism)

الــدرس الرابع: متوسطات المثلث (Medians of the Triangle)

الدرس الخامس: المثلث المتساوى الساقين (Isosceles Triangle)

الدرس السادس: الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات (Interior and Exterior Angles of Polygons)

تستخدم النظريات الهندسية فى كثير من حسابات الذكاء الاصطناعى خاصة فى تحليل الأشكال الهندسية وتصميم الروبوتات الصناعية.

- فهل يمكن تطوير خوارزميات التعلم الآلى لحل مشكلات هندسية فى حياتنا اليومية؟

القضايا والمهارات الحياتية:

- التواصل الرياضى.
- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.
- لغة الرياضيات.

القيم:

- جمال الطبيعة.
- تذوق الفن.
- الوعى الصحى.
- الوعى البيئى.

التطابق (Congruence)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب مفهوم تطابق الأشكال الهندسية المستوية.
- يتعرف الطالب شروط تطابق مضلعين.
- يستخدم الطالب التطابق فى إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع.
- يستخدم الطالب تطابق الأشكال الهندسية فى حل المشكلات الحياتية.
- يتعرف الطالب حالات تطابق مثلثين.
- يثبت الطالب تطابق مثلثين.

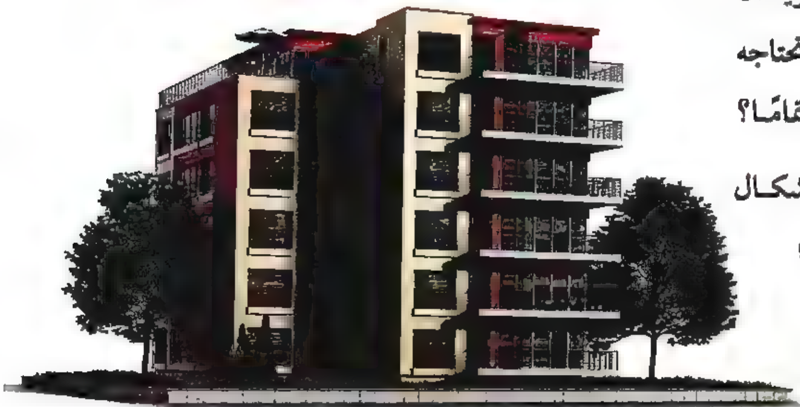
مفردات أساسية

- التطابق **(Congruence)**
- زاوية محصورة **(Included Angle)**
- ضلع واصل بين رأسين **(Included Side)**
- الوتر **(Hypotenuse)**
- المثلث القائم الزاوية **(Right-Angled Triangle)**



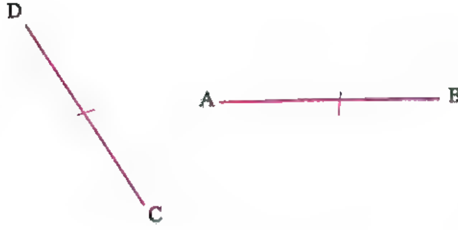
فكر وناقش

- ترسم المهندسة فاطمة مخططًا لواجهة عمارة، وتريد أن تجعل كل النوافذ متماثلة ومتطابقة؛ فما الذى تحتاجه فاطمة لتتأكد أن كل نافذة تطابق الأخرى تمامًا؟
- فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم تطابق الأشكال الهندسية المستوية، وحالات تطابق المثلثات؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.



تعلم 1 تطابق الأشكال الهندسية:

أولًا تطابق قطعتين مستقيمتين:

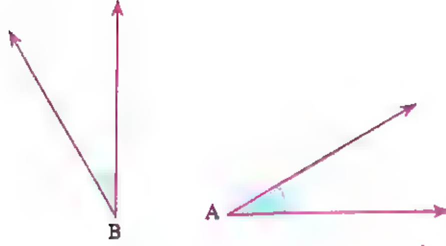


تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا كانتا متساويتين فى الطول.

إذا كان: طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{CD}$ فإن: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

والعكس إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن: طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{CD}$

ثانيًا تطابق زاويتين:



تتطابق الزاويتان إذا كانتا متساويتين فى القياس.

إذا كان: $m(\angle A) = m(\angle B)$ فإن: $\angle A \cong \angle B$

والعكس إذا كانت: $\angle B \cong \angle A$ فإن: $m(\angle B) = m(\angle A)$

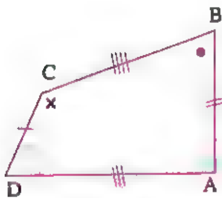
- الترميز فى الرياضيات: الرمز $\cong$ يستخدم فى التعبير عن تطابق شكلين هندسيين.

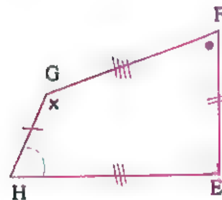
ثالثًا تطابق مضلعين:

يتطابق المضلعان اللذان لهما نفس العدد من الأضلاع. (إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا)

1 أضلاعهما المتناظرة متساوية فى الطول.
2 زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس.

فى الشكل المقابل: إذا كان: ABCD و EFGH مضلعين فيهما:



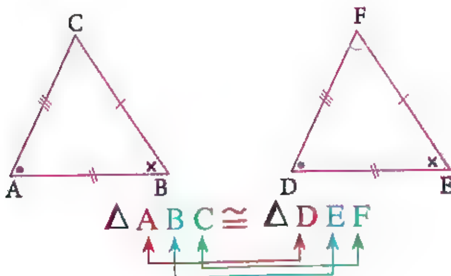


1	2
AB = EF , BC = FG CD = GH , DA = HE أى أن: الأضلاع المتناظرة متساوية فى الطول.	$m(\angle A) = m(\angle E)$, $m(\angle B) = m(\angle F)$ $m(\angle C) = m(\angle G)$, $m(\angle D) = m(\angle H)$ أى أن: الزوايا المتناظرة متساوية فى القياس.

فإن: المضلع ABCD $\cong$ المضلع EFGH

نقاط هامة

- يجب كتابة المضلعين المتطابقين بنفس ترتيب الرءوس المتناظرة (كما فى الشكل المقابل).
- يتطابق المربعان إذا تساوى طولا ضلعى كل منهما.
- يتطابق المستطيلان إذا تساوى طولا بُعدى كل منهما.



مثال 1 في الشكل المقابل:

إذا كان المضلع ABCDE ≅ المضلع LMNOP

AE = 3 سم، MN = 4 سم

$m(\angle L) = 80°$ ، $m(\angle B) = 110°$

أوجد كلًّا من: طول $\overline{LP}$ ، طول $\overline{BC}$ ، $m(\angle M)$ ، $m(\angle A)$

الحل

∵ المضلع ABCDE ≅ المضلع LMNOP

∴ AE = LP = 3 سم ، BC = MN = 4 سم

$m(\angle A) = m(\angle L) = 80°$ ، $m(\angle M) = m(\angle B) = 110°$

مثال 2 في الشكل المقابل:

إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD

بدوران ما حول نقطة ؛ فما قيمة كل من: x , y ؟

وما قيمة محيط المضلع EFGH ؟

الحل

$\because \overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore m(\angle A) + m(\angle B) = 180°$

(زاويتان داخليتان وفي جهة واحدة من القاطع $\overleftrightarrow{AB}$)

$\therefore m(\angle B) = 180° - 60° = 120°$

∵ المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بدوران ما حول نقطة

∴ المضلع ABCD ≅ المضلع EFGH

$\therefore m(\angle F) = m(\angle B) = 120°$

$\therefore 3x = 120$ ، $\therefore x = \frac{120}{3} = 40$

$\therefore GH = CD = 8$ ، $\therefore 4y = 8$ ، $\therefore y = \frac{8}{4} = 2$

$\because \overline{HG} \,//\, \overline{EF}$, $\overline{HE} \,//\, \overline{GF}$

∴ المضلع EFGH متوازي أضلاع

∴ محيط المضلع EFGH = 2 (HE + GH) ⟵ 2 (5 + 8) = 26

∴ محيط المضلع EFGH = 26 سم

تذكـر أن

الانعكاس والانتقال والدوران هي تحويلات هندسية تعطي صورة مطابقة للشكل الهندسي؛ لأنها تحافظ على :

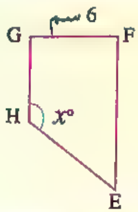
- قياسات الزوايا.
- أطوال الأضلاع.
- التوازي.

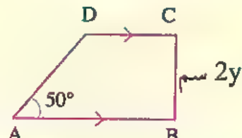
س؟ سؤال 1

في الشكل المقابل:

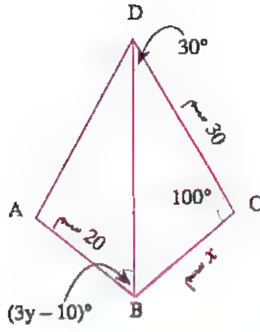
إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بدوران ما حول نقطة،

فما قيمة كل من: x ، y ؟





مثـال 3 في الشكل المقابل:



ΔBCD صورة ΔBAD

بالانعكاس في $\overleftrightarrow{DB}$

أوجد قيمة كل من: x ، y

الحـل

$\because$ ΔBCD صورة ΔBAD بالانعكاس في $\overleftrightarrow{DB}$

$\therefore \Delta BCD \cong \Delta BAD$

$\therefore BA = BC = 20$ $\qquad$ $\therefore x = 20$

في ΔBCD

$\because m(\angle BDC) = 30^\circ \quad , \quad m(\angle C) = 100^\circ$

$\therefore m(\angle DBC) = 180^\circ - (100^\circ + 30^\circ) = 50^\circ$

$\because m(\angle DBC) = m(\angle DBA) = 50^\circ$ (من تطابق المضلعين)

$\therefore 3y - 10 = 50$ $\qquad$ $\therefore 3y = 50 + 10 = 60$

$\therefore y = \frac{60}{3} = 20$



تعلم 2 تطابق مثلثين:

المثلث هو مضلع ثلاثي يحتوي على 6 عناصر (3 أضلاع و3 زوايا)، ولإثبات تطابق مثلثين لا يُشترط إثبات تطابق كل العناصر المتناظرة، بل يُكتفى بثلاثة عناصر بينهم ضلع واحد على الأقل.

حالات تطابق مثلثين:

الحـالـة الأولـى

ثلاثـة أضــلاع

«SSS»

الحـالـة الثانـية

ضلعان وزاوية محصورة

«SAS»

الحـالـة الثالثـة

زاويتـان والضلـع المرسـوم (الواصل) بين رأسيهـما

«ASA»

الحـالـة الرابعـة

زاويتـان وضلع غير واصـل بين الرأسيــن

«AAS»

الحـالـة الخـامسـة

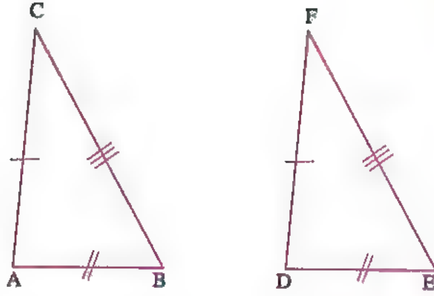
وتر وأحد ضلعى القائمة

«RHS»

نقاط هامة

- الترميز في الرياضيات: في حالات تطابق المثلثات يُستخدم حرف S للدلالة على ضلع في المثلث، وحرف A للدلالة على زاوية في المثلث، وحرف R للدلالة على الزاوية القائمة، وحرف H للدلالة على وتر المثلث القائم الزاوية.
- إذا تطابقت كل زاوية في أحد المثلثين مع نظيرتها في المثلث الآخر فليس من الضروري أن يتطابق المثلثان.

يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظيره فى المثلث الآخر.



فى المثلثين : DEF , ABC

إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

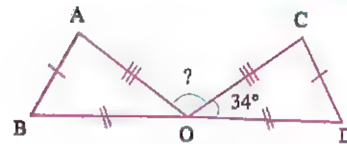
فإن: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

وينتج من التطابق أن:

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

مثال 4

فى الشكل التالى:



1 برهن أن: $\Delta OAB \cong \Delta OCD$

2 أوجد: $m(\angle AOC)$

الحل

∵ المثلثين OAB ، OCD فيهما:

- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطى)
- $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ (معطى)
- $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (معطى)

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ المطلوب (1)

ومن التطابق ينتج أن:

$m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 34°$

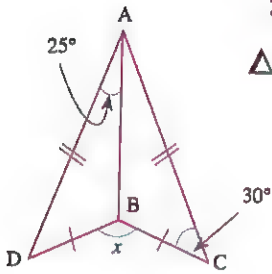
∵ $\angle DOB$ مستقيمة

$\therefore m(\angle AOC) = 180° - (34° + 34°) = 112°$

المطلوب (2)

مثال 5

فى الشكل التالى:



1 أثبت أن: $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

2 أوجد قيمة x بالبرهان.

الحل

∵ المثلثين ABD ، ABC فيهما:

- AC = AD (معطى)
- BC = BD (معطى)
- AB = AB (ضلع مشترك)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ABD$ المطلوب (1)

ومن التطابق ينتج أن:

$m(\angle C) = m(\angle D) = 30°$

، $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) = 25°$

، $m(\angle ABC) = m(\angle ABD)$

$= 180° - (25° + 30°) = 125°$

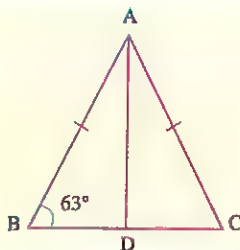
∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = 360°

$\therefore x = 360° - (125° + 125°) = 110°$

المطلوب (2)

سؤال 2

فى الشكل المقابل:



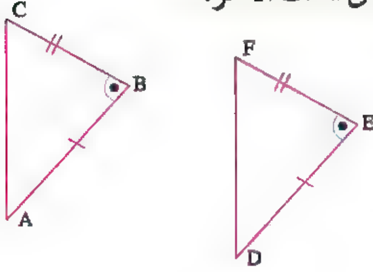
النقطة D منتصف $\overline{BC}$, AB = AC , $m(\angle B) = 63°$

1 أثبت أن: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

2 أوجد بالبرهان: $m(\angle DAC)$

الحالة الثانية: ضلعان وزاوية محصورة (SAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.



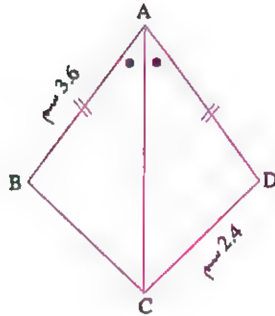
فى المثلثين : ABC , DEF

إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

وينتج من التطابق أن: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$

مثال 6 فى الشكل المقابل:



$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، AB = 3.6 سم

CD = 2.4 سم ، $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle BAD$

1 برهن أن: $\triangle ACB \cong \triangle ACD$

2 أوجد محيط المضلع: ABCD

الحل

$\because$ $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle BAD$

$\therefore m(\angle BAC) = m(\angle DAC)$

$\because$ المثلثين ACD ، ACB فيهما:

- $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (معطى)
- $m(\angle BAC) = m(\angle DAC)$ (إثباتًا)
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (ضلع مشترك)

$\therefore \triangle ACB \cong \triangle ACD$ المطلوب (1)

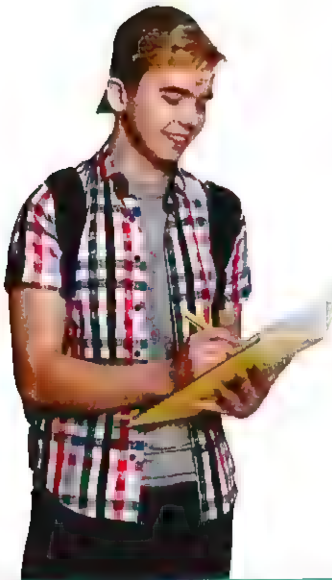
من التطابق ينتج أن:

AB = AD = 3.6 ، BC = DC = 2.4

$\because$ (محيط المضلع ABCD) = AB + BC + CD + DA

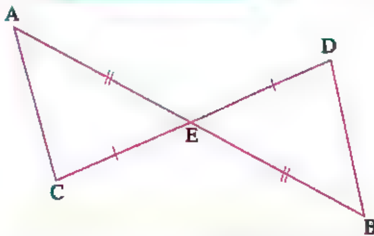
3.6 + 2.4 + 2.4 + 3.6 = 12

المطلوب (2) $\therefore$ محيط المضلع ABCD = 12 سم



سؤال 3

فى الشكل المقابل:



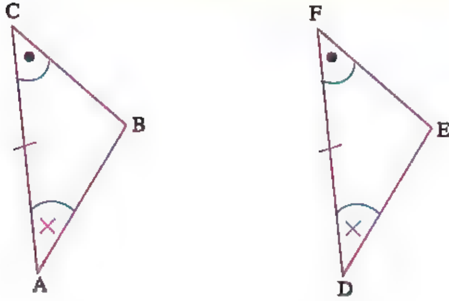
E نقطة منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ برهن أن:

1 $\triangle AEC \cong \triangle BED$

2 $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$

الحالة الثالثة: زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما (ASA)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.



فى المثلثين : ABC , DEF

إذا كان $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

وينتـج من التطابـق:

$\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

مثـال 7 فى الشكل المقابل:

$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{BC} \cong \overline{CE}$

برهـن أن: $\triangle ABC \cong \triangle DCE$

الحـل

$\because \overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $\overrightarrow{EC}$ قاطع لهما

$\therefore m(\angle ACB) = m(\angle E)$ (بالتناظر)

$\because \overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ قاطع لهما

$\therefore m(\angle B) = m(\angle DCE)$ (بالتناظر)

$\because$ المثلثـين DCE ، ABC فيهما:

- $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ (معطى)
- $m(\angle B) = m(\angle DCE)$ (إثباتًا)
- $m(\angle ACB) = m(\angle E)$ (إثباتًا)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCE$ (وهو المطلـوب)

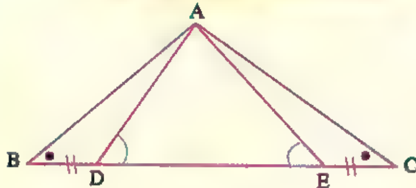


سؤال 4

❶ فى الشكل المقابل:

$\overline{BD} \cong \overline{CE}$, $\angle ADE \cong \angle AED$, $\angle B \cong \angle C$

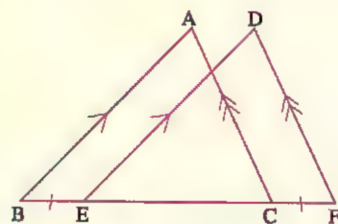
أثبت أن: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$



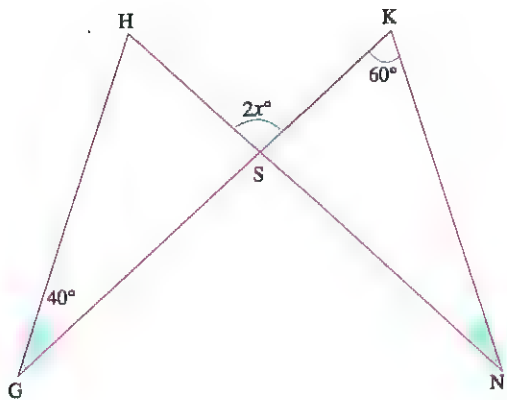
❷ فى الشكل المقابل:

$\overline{BE} \cong \overline{FC}$, $\overline{CA} \parallel \overline{FD}$, $\overline{BA} \parallel \overline{ED}$

برهن أن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



مثـال في الشكل المقابل:



$\overline{SN} \cong \overline{SG}$ ، $\overline{GK} \cap \overline{HN} = \{S\}$

$\angle N \cong \angle G$

$m(\angle G) = 40°$ ، $m(\angle K) = 60°$

1 أثبت أن: $\Delta\, SNK \cong \Delta\, SGH$

2 أوجد قيمة: x

الحـل

$\because \overline{GK} \cap \overline{HN} = \{S\}$

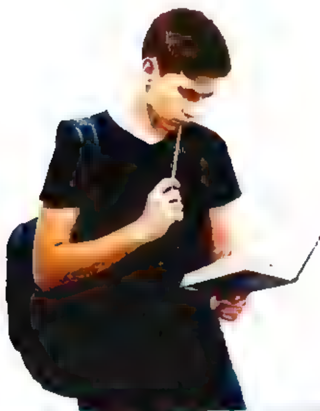
$\therefore m(\angle KSN) = m(\angle HSG)$ (بالتقابل بالرأس)

في المثلثين SNK , SGH

- $\angle KSN \cong \angle HSG$ (إثباتًا)
- $\angle N \cong \angle G$ (معطى)
- $\overline{SN} \cong \overline{SG}$ (معطى)

$\therefore \Delta\, SNK \cong \Delta\, SGH$ المطلـوب (1)

وينتج من التطابق:

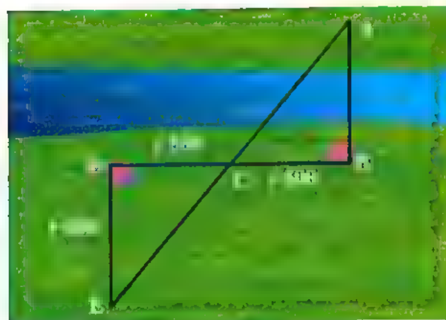


$m(\angle K) = m(\angle H) = 60°$

$\because \angle KSH$ خارجة عن $\Delta\, SHG$

$\therefore 2x = 40° + 60° = 100°$ $\therefore x = \frac{100}{2} = 50$ المطلـوب (2)

مثـال في الشكل المقابل:



لإنشاء جسر مثل $\overline{AB}$ فوق نهر، عليك إيجاد المسافة من النقطة A إلى النقطة B حدد النقاط A , C , E على استقامة واحدة كما هو موضح في الشكل المقابل:

إذا كان: DE = 600 م ، فما المسافة من النقطة A إلى النقطة B؟

الحـل

$\because DC = BC = 500$ $\therefore \overline{DC} \cong \overline{BC}$

$\because m(\angle B) = m(\angle D) = 90°$ $\therefore \angle B \cong \angle D$

$\because \overline{AE} \cap \overline{BD} = \{C\}$

$\therefore m(\angle ACB) \cong (\angle ECD)$ بالتقابل بالرأس

في المثلثين EDC ، ABC

$\overline{BC} \cong \overline{DC}$ ، $(\angle ACB) \cong (\angle ECD)$ ، $(\angle B) \cong (\angle D)$

$\therefore \Delta\, ABC \cong \Delta\, EDC$

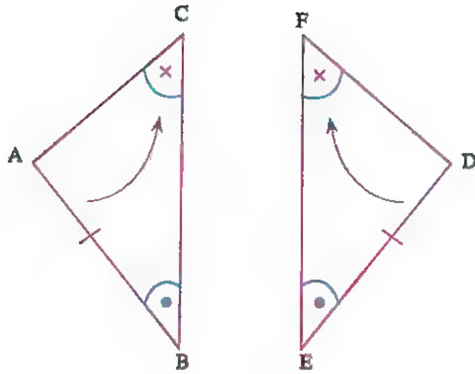
وينتج من التطابق: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$

$\because ED = 600$ $\therefore AB = 600$

أي أن المسافة بين النقطة A إلى النقطة B تساوى 600 متر

الحالة الرابعة: زاويتان وضلع غير واصل بين الرأسين (AAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير واصل بين رأسيهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.



في المثلثين: DEF , ABC

إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\angle C \cong \angle F$ ، $\angle B \cong \angle E$

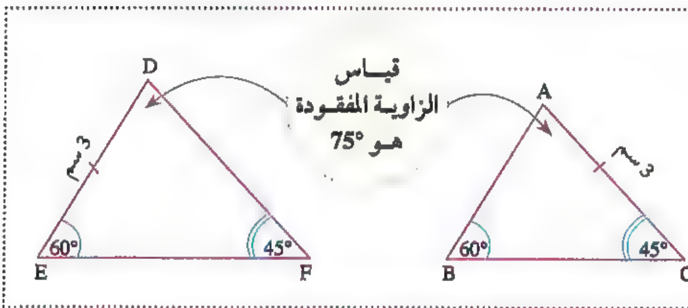
فإن: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

وينتج من التطابق:

$\angle A \cong \angle D$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

لاحظ أن

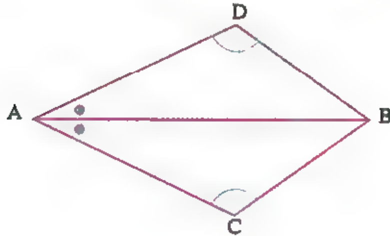
المثلثان DEF ، ABC على اليسار يمثلان نسخة من الحالة AAS ولكن المثلثين غير متطابقين، والسبب أن الضلعين المتطابقين غير متناظرين.



مثال 10 في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{AB}$ ينصف $\angle DAC$ ، $(\angle ADB) \cong (\angle ACB)$

برهن أن: $\Delta ACB \cong \Delta ADB$



الحل

$\because$ $\overrightarrow{AB}$ ينصف $\angle DAC$

$\therefore (\angle DAB) \cong (\angle CAB)$

المثلثان ADB ، ACB فيهما:

- $(\angle DAB) \cong (\angle CAB)$ (إثباتًا)
- $(\angle ADB) \cong (\angle ACB)$ (معطى)
- $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (ضلع مشترك)

$\therefore \Delta ADB \cong \Delta ACB$ (وهو المطلوب)

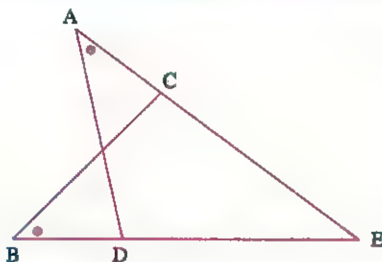


سؤال 5

في الشكل المقابل:

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، $\angle A \cong \angle B$

أثبت أن: AE = BE



الحالة الخامسة: وتر واحد ضلعى القائمة (RHS):

يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظيريهما فى المثلث الآخر.

فى المثلثين: DEF , ABC

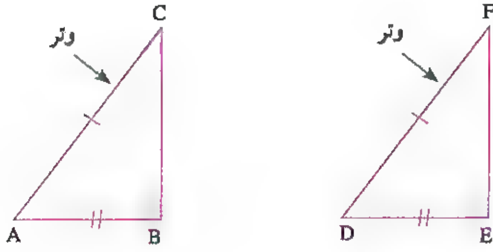
إذا كان: $m(\angle B) = m(\angle E) = 90°$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

وينتج من التطابق:

$\angle C \cong \angle F$, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$



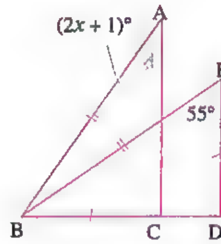
مثال 11

فى الشكل المقابل:

BC = ED , AB = BE

1 أثبت أن: $\triangle ACB \cong \triangle BDE$

2 أوجد قيمة: x



لاحظ أن

فى المثلث القائم الزاوية الضلع المقابل للزاوية التى قياسها 90° يسمى وتر المثلث وهو أكبر الأضلاع طولًا فى المثلث.

الحل

فى $\triangle BDE$

$\because m(\angle E) = 55°$, $m(\angle D) = 90°$

$\therefore m(\angle EBD) = 180° - (90° + 55°) = 35°$

$\because$ المثلثين BDE ، ACB فيهما:

AB = BE (معطى)

BC = ED (معطى)

$m(\angle ACB) = m(\angle D) = 90°$ (معطى)

$\therefore \triangle ACB \cong \triangle BDE$ المطلوب (1)

وينتج من التطابق: $m(\angle BAC) = m(\angle EBD)$

$\therefore 2x + 1 = 35$, $\therefore 2x = 35 - 1 = 34$

$\therefore x = \frac{34}{2} = 17$ المطلوب (2)



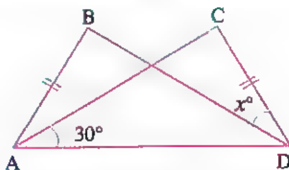
نقاط هامة

- فى حالة تطابق المثلثين بضلعين وزاوية يجب أن تكون الزاوية محصورة بين الضلعين إلا إذا كان المثلثان قائمى الزاوية فيمكن أن تكون الزاوية غير محصورة.

سؤال 6

فى الشكل المقابل:

أوجد قيمة: x



تطابق مضلعين

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، فإن: DC .... AB

(أ) = (ب) < (جـ) > (د) لا شيء مما سبق

2 إذا كانت C منتصف $\overline{AB}$ ، فإن: .... $\cong \overline{AC}$

(أ) $\overline{AB}$ (ب) $\overline{BC}$ (جـ) $\overline{BA}$ (د) BC

3 إذا كان المضلع EFGH ≅ ABCD ، فإن: .... = GH

(أ) AD (ب) AB (جـ) CD (د) BC

4 إذا كان: $\overline{EF} \cong \overline{DC}$ ، وكان طول $\overline{EF}$ = 7سم، فإن EF + DC = ... سم

(أ) 7 (ب) 12 (جـ) 14 (د) 49

5 إذا كان: $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، فإن: .... = AB – DC

(أ) 0 (ب) 5 (جـ) 2 (د) 1

6 إذا كان: $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ ، فإن: .... = $\frac{AB}{CD}$

(أ) AB (ب) 1 (جـ) DC (د) 0

7 إذا كان: $\overline{xy} \cong \overline{AB}$ ، فإن: .... = $2AB - 2xy$

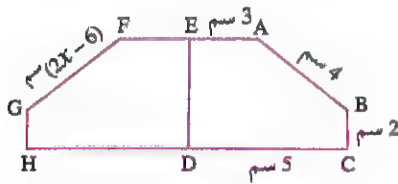
(أ) 8 (ب) 5 (جـ) 2 (د) 0

8 إذا كان المضلع EFGH ≅ ABCD ، وكان $m(\angle H) = 50°$ ، $m(\angle G) = 70°$ ،

فإن: .... = $m(\angle A) + m(\angle B)$

(أ) 120° (ب) 240° (جـ) 140° (د) 360°

2 في الشكل المقابل:

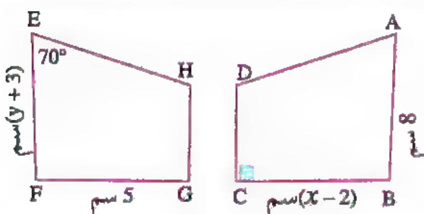


المضلع ABCDE ≅ المضلع FGHDE

1 احسب قيمة x

2 احسب محيط الشكل ABCHGF

3 في الشكل المقابل:



المضلع ABCD ≅ المضلع EFGH

طول $\overline{AB}$ = 8 سم ، $m(\angle D) = 110°$

أوجد:

1 طول $\overline{EF}$ 2 $m(\angle A)$ 3 $m(\angle H)$

4 قيمة x 5 قيمة $x + y$

4 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ ، فإن $m(\angle C) = m(\angle ....)$

(أ) A　(ب) Y　(جـ) X　(د) Z

2 إذا كان: $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ ، فإن: $\overline{LM}$ .... $\overline{AB}$

(أ) $\perp$　(ب) $<$　(جـ) $\cong$　(د) $=$

3 إذا كان: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، فإن: $DF =$ ....

(أ) AC　(ب) BC　(جـ) AB　(د) DE

4 إذا كان: $\Delta LMN \cong \Delta DEF$ ، فإن: $\frac{LM}{DE} =$ ....

(أ) 0　(ب) 1　(جـ) 2　(د) 3

5 إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، $m(\angle A) + m(\angle B) = 140°$ ، فإن: $m(\angle F) =$ ....

(أ) $100°$　(ب) $40°$　(جـ) $80°$　(د) $140°$

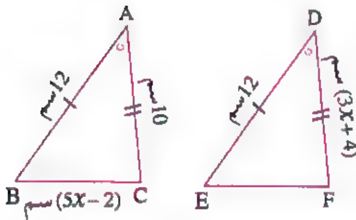
6 إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، $m(\angle A) = 45°$ ، $m(\angle C) = 75°$ ، فإن: $m(\angle E) =$ ....

(أ) $60°$　(ب) $55°$　(جـ) $65°$　(د) $100°$

7 أى من المثلثات التالية لا يطابق المثلثات الأخرى؟

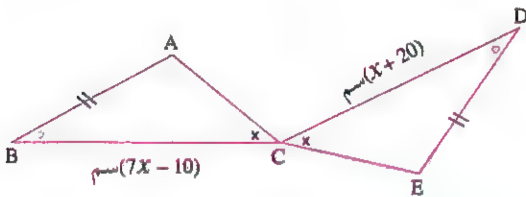


8 في الشكل التالي: ما طول $\overline{EF}$ ؟



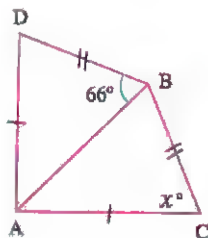
(أ) 6 سم　(ب) 8 سم
(جـ) 10 سم　(د) 12 سم

9 في الشكل التالي: ما طول $\overline{BC}$ ؟



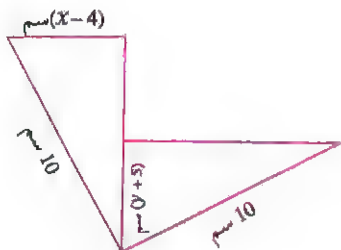
(أ) 5 سم　(ب) 7 سم
(جـ) 20 سم　(د) 25 سم

10 في الشكل التالي: ما قيمة x ؟



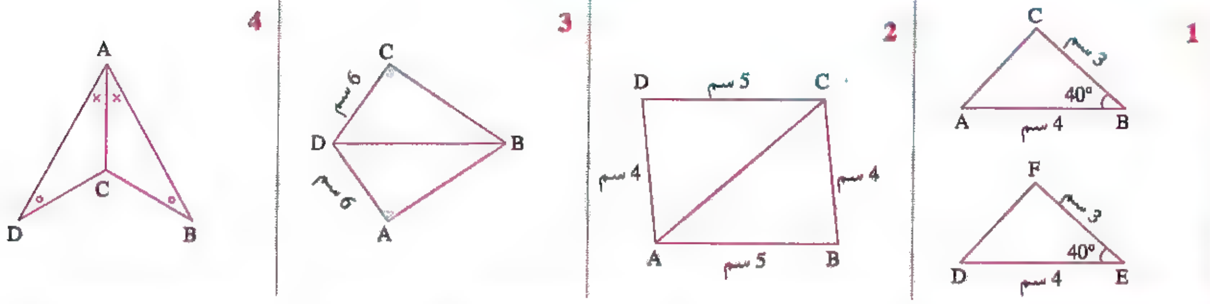
(أ) 66
(ب) 45
(جـ) 34
(د) 69

11 في الشكل التالي: ما قيمة $x - y$ ؟



(أ) 9
(ب) 6
(جـ) 5
(د) 1

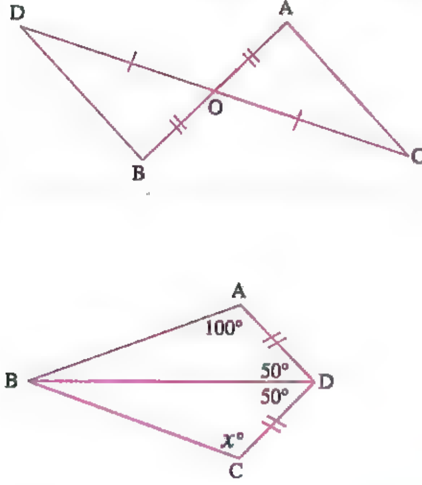
5 ما هي الحالة المستخدمة في إثبات تطابق المثلثين في كل مما يأتي؟



6 في الشكل المقابل:

O منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{DC}$

برهن على أن: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$



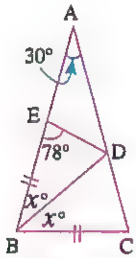
7 في الشكل المقابل:

$AD = CD$, $m(\angle ADB) = m(\angle CDB) = 50°$

$m(\angle A) = 100°$

1 أثبت أن: $\Delta ADB \cong \Delta CDB$

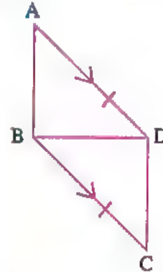
2 احسب قيمة x.



8 في الشكل التالي:

$\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

برهن على أن: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

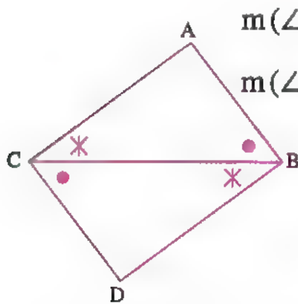


9 في الشكل التالي:

1 برهن على أن:

$\Delta BCD \cong \Delta BED$

2 أوجد قيمة x.

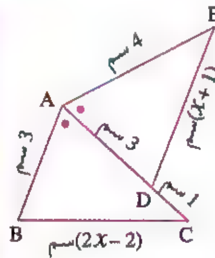


10 في الشكل التالي:

برهن على أن:

$\Delta ABC \cong \Delta ADE$

ثم أوجد قيمة x.



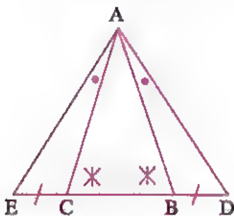
11 في الشكل التالي:

$m(\angle ABC) = m(\angle DCB)$

$m(\angle ACB) = m(\angle DBC)$

برهن على أن:

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$



12 في الشكل المقابل:

$m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$, $BD = CE$

$m(\angle BAD) = m(\angle CAE)$

برهن على أن: $AD = AE$

13 في الشكل التالي:

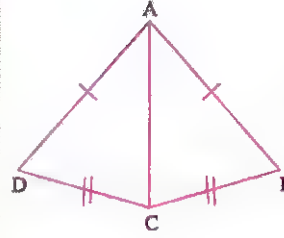
AB = AD , BC = DC

m (∠B) = 70°

1 أثبت أن:

Δ ABC ≅ Δ ADC

2 أوجد: m (∠D)

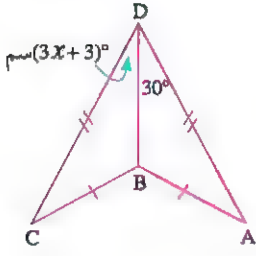


14 في الشكل التالي:

AD = CD , AB = CB

m (∠ADB) = 30°

أوجد: قيمة x



15 في الشكل المقابل:

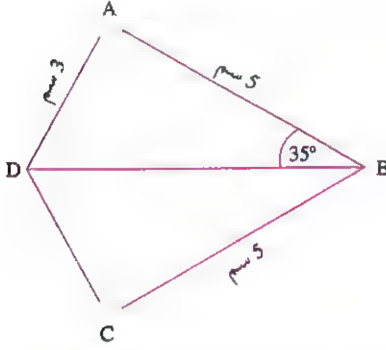
m (∠A) = m (∠C) = 90°

طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{BC}$ = 5 سم

وطول $\overline{AD}$ = 3 سم ، m (∠ABD) = 35°

1 أثبت أن: Δ ABD ≅ Δ CBD

2 أوجد طول: $\overline{CD}$ ، m (∠BDC)



16 في الشكل المقابل:

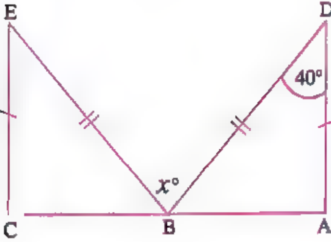
B ∈ $\overline{AC}$, m (∠D) = 40°

m (∠A) = m (∠C) = 90°

AD = CE , BD = BE

1 أثبت أن: Δ ABD ≅ Δ CBE

2 أوجد قيمة x.

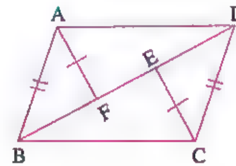


17 في الشكل التالي

برهن على أن:

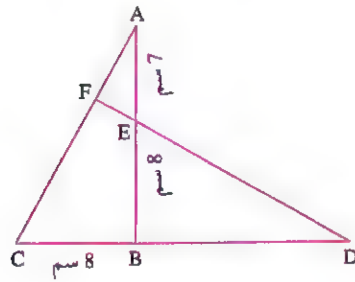
1 $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

2 DF = BE



18 في الشكل التالي:

أوجد طول $\overline{BD}$

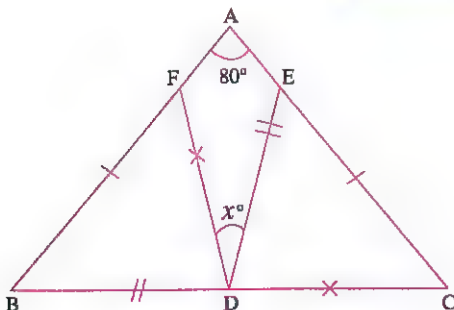




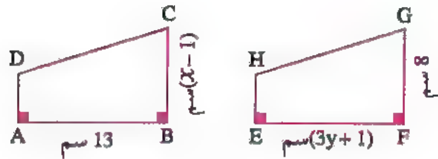
19 في الشكل المقابل:

1 أثبت أن: Δ BFD ≅ Δ ECD

2 أوجد قيمة x.

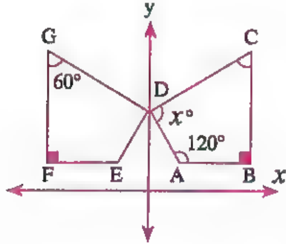


1 اختر الإجابة الصحيحة:



1 في الشكل المقابل: إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بانتقال ما ، فما قيمة $x + y$ ؟ ....

(أ) 15　　(ب) 14
(جـ) 13　　(د) 12



2 في الشكل المقابل: إذا كان المضلع EFGD صورة المضلع ABCD بالانعكاس فى محور y ، فما قيمة x ؟ ....

(أ) 90　　(ب) 60
(جـ) 120　　(د) 70

3 إذا كان: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، وكان $m(\angle A) + m(\angle B) = 100°$ ، فإن $m(\angle F) =$ ....

(أ) 100°　　(ب) 180°　　(جـ) 80°　　(د) 60°

4 إذا كان: $\Delta ABC \cong \Delta HGK$ ، وكان $m(\angle B) = 40°$ ، $m(\angle K) = 100°$ ، فإن: $m(\angle H) =$ ....

(أ) 80°　　(ب) 100°　　(جـ) 40°　　(د) 60°

5 إذا كان: $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، وطول $\overline{AB} = 4$ سم، فإن: $3(AB + DC) =$ ....

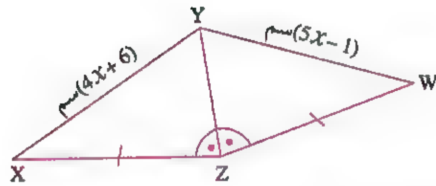
(أ) 18　　(ب) 24　　(جـ) 12　　(د) 8

6 إذا كان: $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، و كان طول $\overline{AB} = 12$ سم ، فإن: $\frac{1}{3} DC =$ ....

(أ) 4 سم　　(ب) 12 سم　　(جـ) 8 سم　　(د) 6 سم

7 إذا كان المضلع ABCD يطابق المضلع EFGH، فإن: .... $\cong \overline{GH}$

(أ) $\overline{AB}$　　(ب) $\overline{AC}$　　(جـ) $\overline{BC}$　　(د) $\overline{CD}$

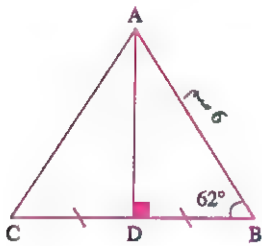


8 في الشكل المقابل:

ما قيمة x ؟ ....

(أ) 3　　(ب) 7
(جـ) 8　　(د) 5

2 أجب عما يأتي:

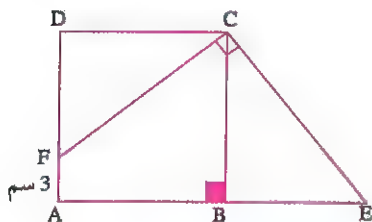


1 في الشكل المقابل:

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{BC}$ منتصف D

طول $\overline{AB} = 6$ سم ، $m(\angle B) = 62°$

أوجد: (أ) طول $\overline{AC}$　　(ب) $m(\angle DAC)$



2 في الشكل المقابل:

ABCD مربع طول ضلعه 12 سم

$AF = 3$ سم ، $\overline{CF} \perp \overline{CE}$

(أ) أثبت أن: $\Delta CBE \cong \Delta CDF$

(ب) أوجد طول $\overline{BE}$

ذاكر

نظرية فيثاغورس وعكسها
(Pythagoras' Theorem and its Converse)



 نواتج التعلم

- يتعرف الطالب على العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- يوجد الطالب طول أحد ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية إذا عُلِمَ طول الوتر وطول ضلع القائمة الآخر.
- يوجد الطالب طول الوتر فى مثلث قائم الزاوية إذا عُلِمَ طولا ضلعى القائمة.
- يثبت الطالب أن المثلث قائم الزاوية إذا عُلِمَ أطوال أضلاعه الثلاثة.
- يحدد الطالب نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا عُلِمَ أطوال أضلاعه.

مفردات أساسية

- نظرية فيثاغورس (Pythagoras Theorem)
- الوتر (Hypotenuse)

 فكر وناقش

- إذا كانت لديك أربع قطع من الخشب أطوالها 13 سم ، 12 سم ، 10 سم ، 5 سم

فإى ثلاث قطع منها يمكنك أن تستخدمها لعمل مثلث قائم الزاويـة؟



- فى هذا الدرس، سـوف تتعرف على نظرية فيثاغورس وعكسها، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم 1 نظرية فيثاغورس:

- نظرية فيثاغورس هى معادلة تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- سُميت نسبة إلى عالم الرياضيات اليونانى «فيثاغورس».

نظرية فيثاغورس

مساحة المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية

تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة.

صيغة أخرى لنظرية فيثاغورس:

فى المثلث القائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

أى أن: $c^2 = a^2 + b^2$

(حيث: b ، a طولا ضلعى القائمة فى المثلث ، c طول وتر هذا المثلث).

لاحظ أن

إذا كان : $c^2 = a^2 + b^2$

فـإن : 1 $a^2 = c^2 - b^2$

2 $b^2 = c^2 - a^2$

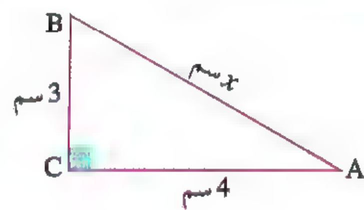
استخدام نظرية فيثاغورس:

تستخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع فى المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولى الضلعين الآخرين.

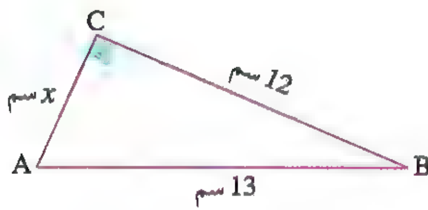
مثال 1

أوجد قيمة x فى كل مما يأتى، ثم أوجد مساحة المثلث فى كل شكل:

1



2



الحل

1 ∵ المثلث ABC قائم الزاوية فى C

$\therefore\ (AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$\therefore\ x^2 = (4)^2 + (3)^2$

$= 16 + 9 = 25 \qquad \therefore\ x = \sqrt{25} = 5$

∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ سم²

2 ∵ المثلث ABC قائم الزاوية فى C

$\therefore\ (AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$

$\therefore\ x^2 + (12)^2 = (13)^2$

$\therefore\ x^2 + 144 = 169$

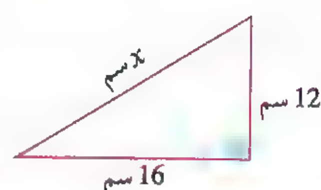
$\therefore\ x^2 = 169 - 144 = 25 \qquad \therefore\ x = \sqrt{25} = 5$

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ سم²

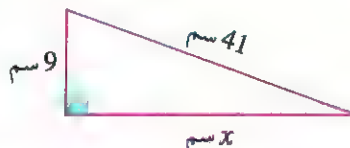
سؤال 1

فى كل من المثلثات القائمة الزاوية التالية احسب قيمة x :

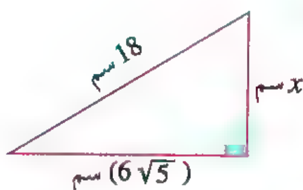
1



2



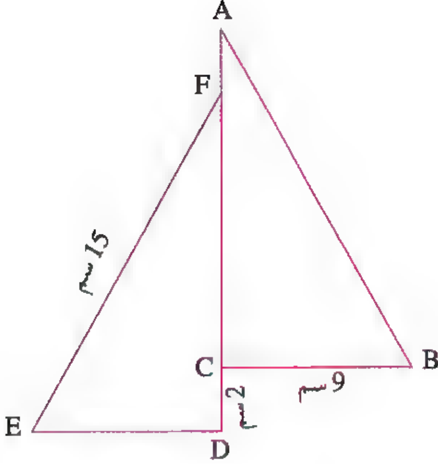
3



مثـال 2 في الشكل المقابل:

إذا كان: $\Delta ACB \cong \Delta FDE$

أوجد طول: $\overline{AF}$



الحـل

$\because \Delta ACB \cong \Delta FDE$

$\therefore AB = FE = 15$

$\because$ المثلث ABC قائم الزاوية في C

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 - (BC)^2$

$= (15)^2 - (9)^2$

$= 225 - 81 = 144$

$\therefore AC = \sqrt{144} = 12$

$\because \Delta ACB \cong \Delta FDE$

$\therefore AC = FD = 12 \qquad \therefore FC = 12 - 2 = 10$

$\therefore AF = AC - FC = 12 - 10 = 2$

$\therefore$ طول $\overline{AF} = 2$ سم

مثـال 3 في الشكل المقابل:

سلم طوله 13 م يرتكز على حائط رأسي ارتفاعه 12 م

أوجد بُعد طرف السلم السفلي عن الحائط.

الحـل

ليكن x بُعد طرف السلم السفلي عن الحائط

(من نظريـة فيثاغورس)

$\therefore x^2 + 12^2 = 13^2 \qquad \therefore x^2 + 144 = 169$

$x^2 = 169 - 144 = 25$

$x = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ بُعد طرف السلم السفلي عن الحائط = 5 متر

س؟ سؤال 2

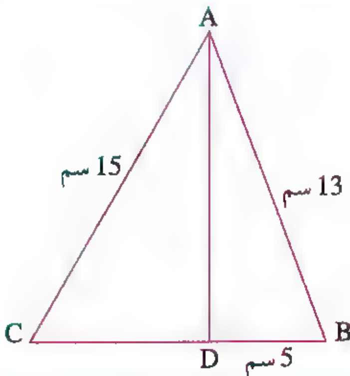
في الشكل المقابل: ABC مثلث فيـه:

AB = 13 سم ، AC = 15 سم ،

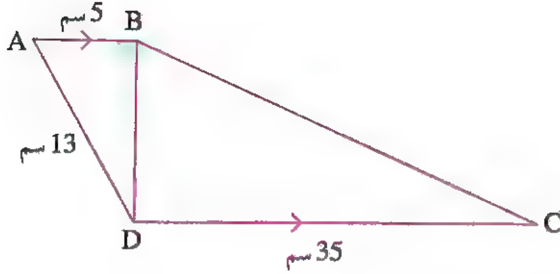
$D \in \overline{CB}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{CB}$

أوجد:

- طول $\overline{CD}$
- مساحـة ΔABC



مثال 4 في الشكل المقابل:



إذا كان: $\overline{AB} // \overline{DC}$

أوجد محيط المضلع: ABCD

الحل

- في المثلث ABD القائم الزاوية في B

$\because (BD)^2 = (AD)^2 - (AB)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 169 - 25 = 144$

$\therefore BD = \sqrt{144} = 12$

$\because \overline{AB} // \overline{DC}$

$\therefore m(\angle BDC) = m(\angle ABD) = 90°$ زاويتان متبادلتان داخليًا

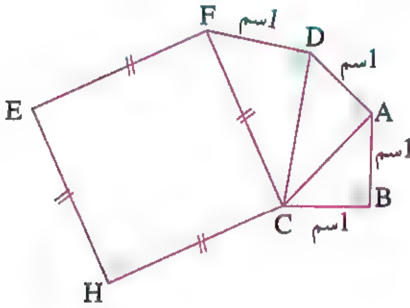
- في المثلث BDC

$\because (BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$

$\therefore BC = \sqrt{1369} = 37$

$\because$ محيط المضلع = مجموع أطوال أضلاعه $\therefore$ (محيط المضلع ABCD) = 13 + 5 + 37 + 35 = 90 سم

مثال 5 في الشكل المقابل:



إذا كانت المثلثات ABC ، DAC ، FDC

قائمة الزوايا في B ، A ، D على الترتيب ،

CB = AB = AD = FD = 1 سم فأوجد مساحة المربع: CFEH

الحل

- في المثلث ABC القائم الزاوية في B

$\because (AC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2 = 1 + 1 = 2$ $\therefore AC = \sqrt{2}$

- في المثلث DAC القائم الزاوية في A

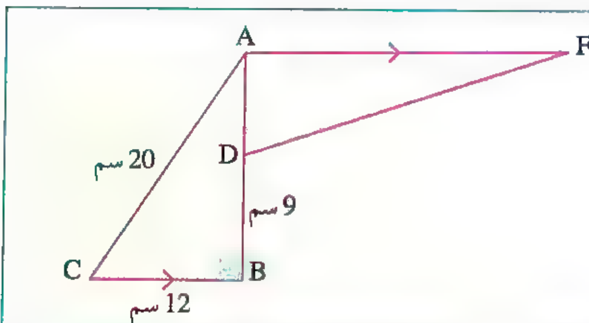
$\because (DC)^2 = (DA)^2 + (AC)^2 = (1)^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$ $\therefore DC = \sqrt{3}$

- في المثلث FDC القائم الزاوية في D

$\because (FC)^2 = (FD)^2 + (DC)^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$ $\therefore FC = \sqrt{4} = 2$

$\because$ مساحة المربع = S^2 ، $\because S = 2$ $\therefore$ مساحة المربع CFEH = $(2)^2$ = 4 سم²

س؟ سؤال 3



في الشكل المقابل:

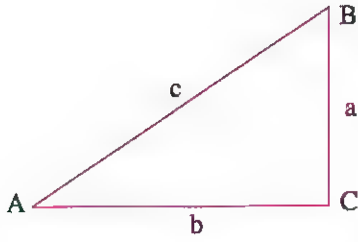
$\overline{AF} // \overline{CB}$ ، طول $\overline{DB}$ = 9 سم ، AF = 2CB ،

$m(\angle B) = 90°$

أوجد طول كل من: $\overline{AD}$ ، $\overline{FD}$

تعلم 2 عكس نظرية فيثاغورس:

إذا كان مجموع مربعى طولى ضلعين فى مثلث يساوى مربع طول الضلع الثالث، كان المثلث قائم الزاوية.



إذا كان: المثلث ABC فيه: $a^2 + b^2 = c^2$

فإن: $m(\angle C) = 90°$

أى أن: المثلث ABC يكون قائم الزاوية فى C

مثال 1 أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

1 5 سم ، $3\sqrt{2}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم

2 17 سم ، 15 سم ، 8 سم

3 9 سم ، 10 سم ، 12 سم

4 $2\sqrt{15}$ سم ، $4\sqrt{5}$ سم ، $2\sqrt{5}$ سم

الحل

1 نحسب مربعات الأطوال وهى:

$(\sqrt{7})^2 = 7$ ، $(3\sqrt{2})^2 = 18$ ، $(5)^2 = 25$

$\because 7 + 18 = 25$

$\therefore (\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{2})^2 = (5)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

2 نحسب مربعات الأطوال وهى:

$(17)^2 = 289$ ، $(15)^2 = 225$ ، $(8)^2 = 64$

$\because 64 + 225 = 289$

$\therefore (8)^2 + (15)^2 = (17)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

3 نحسب مربعات الأطوال وهى:

$(9)^2 = 81$ ، $(10)^2 = 100$ ، $(12)^2 = 144$

$\because 100 + 81 = 181 \neq 144$

$\therefore (10)^2 + (9)^2 \neq (12)^2$

∴ المثلث غير قائم الزاوية.

4 نحسب مربعات الأطوال وهى:

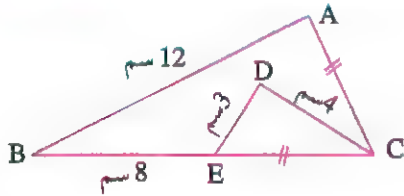
$(2\sqrt{15})^2 = 60$ ، $(4\sqrt{5})^2 = 80$ ، $(2\sqrt{5})^2 = 20$

$\because 20 + 60 = 80$

$\therefore (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{15})^2 = (4\sqrt{5})^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

مثال 2 فى الشكل المقابل:



$EC = AC$ أثبت أن: $m(\angle A) = 90°$

الحل

فى المثلث EDC القائم الزاوية فى D

$\therefore (EC)^2 = (ED)^2 + (DC)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore EC = \sqrt{25} = 5$ $\because AC = EC = 5$ ، $BC = 8 + 5 = 13$

فى المثلث ABC

$\because (BC)^2 = (13)^2 = 169$ ، $\because (BA)^2 + (AC)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$\therefore (BA)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$

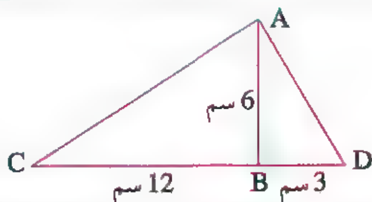
$\therefore m(\angle A) = 90°$

سؤال 4

فى الشكل المقابل:

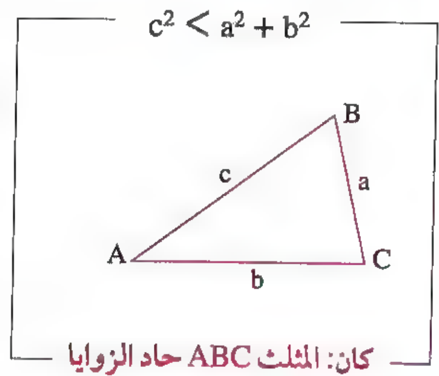
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

أثبت أن: $m(\angle CAD) = 90°$



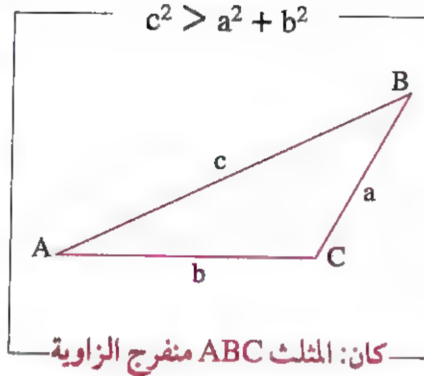
- فى المثلث ABC ، إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث، وكان:

$c^2 < a^2 + b^2$



كان: المثلث ABC حاد الزوايا

$c^2 > a^2 + b^2$



كان: المثلث ABC منفرج الزاوية

لاحظ أن

- تستخدم متباينة فيثاغورس للتعرف على ما إذا كان المثلث حاد الزوايا أم منفرج الزاوية.
- بينما عكس نظرية فيثاغورس يستخدم فى التعرف على ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا .

مثال 8

حدد نوع المثلث بالنسبة لزواياه، إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى:

1. 5 سم ، 5 سم ، $5\sqrt{2}$ سم
2. 11 سم ، 12 سم ، 16 سم
3. 4.5 سم ، 20 سم ، 21 سم
4. 1.5 سم ، 2 سم ، 2.5 سم

الحل

1. ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = $5\sqrt{2}$ سم

$\because (5\sqrt{2})^2 = 50 \quad , \quad (5)^2 + (5)^2 = 25 + 25 = 50$

$\therefore (5\sqrt{2})^2 = (5)^2 + (5)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

2. ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 16 سم

$\because (16)^2 = 256 \quad , \quad (11)^2 + (12)^2 = 121 + 144 = 265$

$\therefore (16)^2 < (11)^2 + (12)^2$

∴ المثلث حاد الزوايا.

3. ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 21 سم

$\because (21)^2 = 441$

$, \quad (20)^2 + (4.5)^2 = 400 + 20.25 = 420.25$

$\therefore (21)^2 > (20)^2 + (4.5)^2$

∴ المثلث منفرج الزاوية.

4. ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 2.5 سم

$\because (2.5)^2 = 6.25$

$, \quad (2)^2 + (1.5)^2 = 4 + 2.25 = 6.25$

$\therefore (2.5)^2 = (2)^2 + (1.5)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

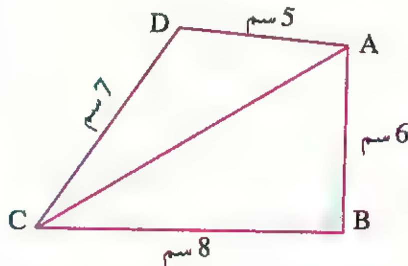
سؤال 5

1. فى كل مما يأتى حدد نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كالتالى:

(أ) 7 سم ، 5 سم ، 4 سم (ب) 2 سم ، $\sqrt{3}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم (جـ) 11 سم ، 15 سم ، 10 سم

2. فى الشكل المقابل:

حدد نوع المثلث ADC بالنسبة لزواياه.



تدرّب 2

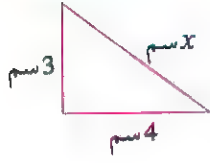
نظرية فيثاغورس وعكسها (Pythagoras' Theorem and its Converse)

تذكر ▲ فهم ■ تطبيق ■ تحليل

▶ أسئلة الكتاب المدرسي

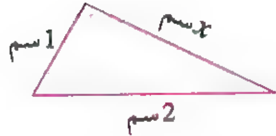
نظرية فيثاغورس:

1 اختر الإجابة الصحيحة:



1 في الشكل المقابل: ما قيمة x ؟

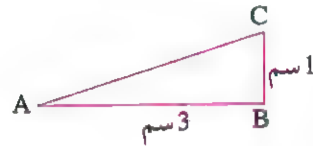
(أ) 1 (ب) 7 (جـ) 5 (د) 25



2 في الشكل المقابل: ما قيمة x ؟

(أ) 1 (ب) 3

(جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt{3}$



3 في الشكل المقابل: ما مساحة المربع المنشأ على $\overline{AC}$؟

(أ) 4 سم^2 (ب) 2 سم^2

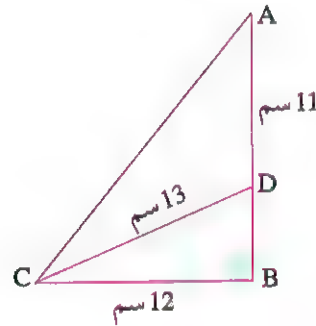
(جـ) 8 سم^2 (د) 10 سم^2

4 مثلث ABC قائم الزاوية في B ، AB = 15سم، BC = 20سم، فإن طول $\overline{AC}$ يساوى .... سم.

(أ) $5\sqrt{7}$ (ب) 175 (جـ) 25 (د) 20

5 مثلث ABC قائم الزاوية في A ، AB = 6سم، BC = 10سم، فإن مساحة المثلث ABC = ... سم^2

(أ) 60 (ب) 30 (جـ) 40 (د) 24



6 في الشكل المقابل: AD = 11سم ، CD = 13سم ، BC = 12سم

m (∠ B) = 90° ، فإن طول $\overline{AC}$ يساوى.................. سم.

(أ) 5 (ب) 25

(جـ) 20 (د) 16

7 ABCD مستطيل فيه AB = 8سم، BC = 6سم ، فإن طول قطره = ... سم.

(أ) 7 (ب) 9 (جـ) 10 (د) 11

8 مستطيل عرضه 5سم، وطول قطره 13سم تكون مساحته = ... سم^2

(أ) 18 (ب) 60 (جـ) 65 (د) 32.5

9 معين طولا قطريه 12سم، 16سم ، فإن طول ضلعه = ... سم.

(أ) 6 (ب) 8 (جـ) 10 (د) 12

10 إذا كان ABCD مربعًا، فإن $(AC)^2$ = ...

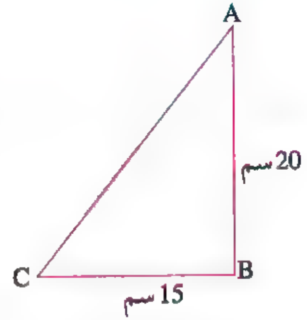
(أ) $(AB)^2$ (ب) $2(AB)^2$ (جـ) AB + BC (د) $2\,(BD)^2$

2 في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x:

3 أوجد قيمة x في كل من الشكلين التاليين:

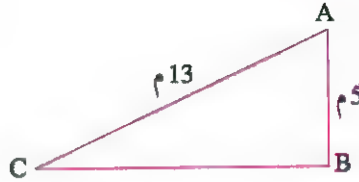
4 أوجد مساحة المطلوب فى كل شكل من الأشكال التالية:

1



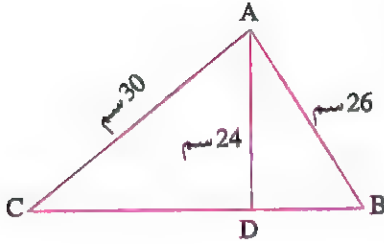
مساحة المثلث ABC

2



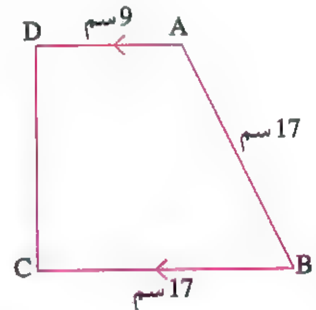
مساحة المثلث ABC

3



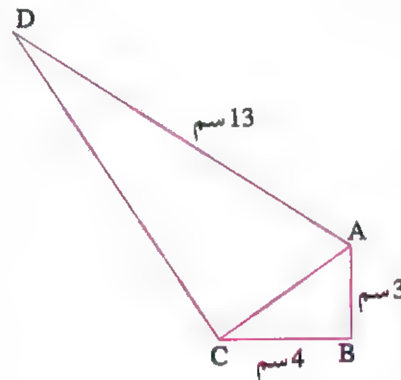
مساحة المثلث ABC

4



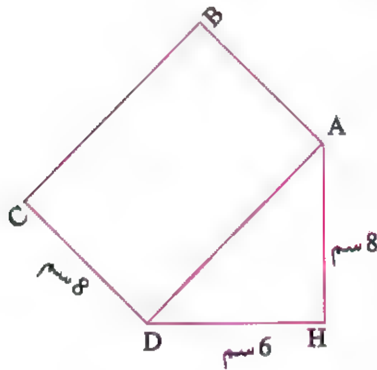
مساحة الشكل ABCD

5



مساحة الشكل ABCD

6 ABCD مستطيل



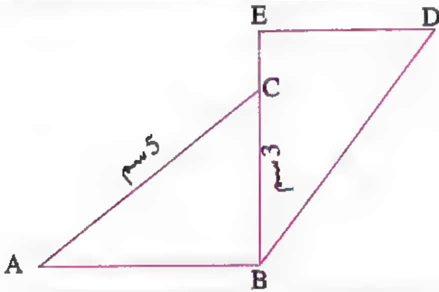
مساحة الشكل ABCDH

5 فى الشكل المقابل: $\Delta ABC \cong \Delta BED$

AC = 5سم ، BC = 3سم

$m(\angle E) = m(\angle ABC) = 90°$

أوجد طول $\overline{EC}$

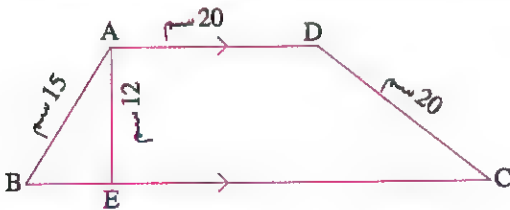


6 فى الشكل المقابل: ABCD شبه منحرف فيه:

AB = 15سم ، AD = DC = 20سم

إذا كان ارتفاع شبه المنحرف 12سم

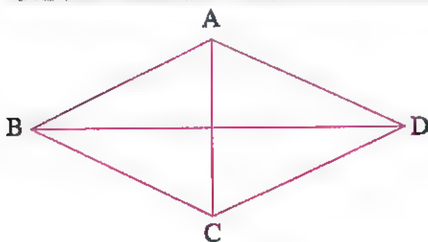
فأوجد مساحته.

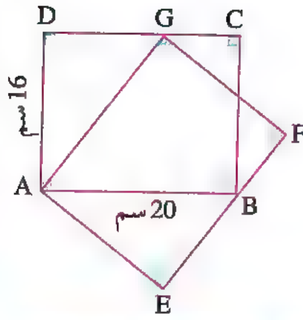


7 فى الشكل المقابل: ABCD معين محيطه 52 م،

طول قطره $\overline{BD}$ يساوى 24 م

أوجد مساحة المعين ABCD بالمتر المربع.





8 في الشكل المقابل:

المستطيل ABCD يطابق المستطيل AGFE

أوجد مع البرهان طول $\overline{BF}$



9 انزلق طفل من منزلق مائي مائل طوله 15 مترًا،

إذا كانت المسافة الأفقية بين بداية ونهاية المنزلق 9 أمتار،

فما ارتفاع البداية عن سطح الماء؟

عكس نظرية فيثاغورس

10 اختر الإجابة الصحيحة:

1 في مثلث ABC إذا كان: $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$ فإن: $m(\angle C)$ تكون ....

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

2 في مثلث XYZ إذا كان: $(XY)^2 = (YZ)^2 - (XZ)^2$ فإن زاوية .... قائمة.

(أ) X (ب) Y (جـ) Z (د) غير ذلك

3 الأطوال 6 سم، 8 سم، 10 سم تصلح أن تكون أضلاع مثلث ....

(أ) قائم الزاوية (ب) منفرج الزاوية (جـ) حاد الزوايا (د) متساوي الساقين

4 أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

(أ) 4 , 7 , 7 (ب) 13 , 5 , 12 (جـ) 7 , 8 , 5 (د) 5 , 7 , 3

5 أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث حاد الزوايا؟

(أ) $4\sqrt{2}$, 4 , 4 (ب) 10 , 8 , 6 (جـ) 8 , 3.7 , 7.5 (د) 9 , 6 , 6

6 أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث منفرج الزاوية؟

(أ) 27 , 10 , 24 (ب) 1.5 , 2 , 2.5 (جـ) 7 , 7 , 7 (د) $10\sqrt{3}$, 10 , 20

11 في كل مما يأتي، اذكر نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كالتالي:

1 6 سم، 3 سم، 5 سم

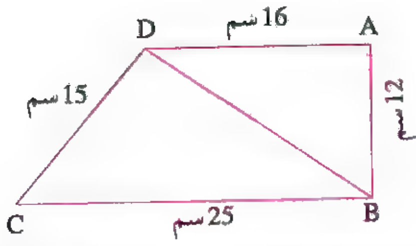
2 $\sqrt{6}$ سم، $\sqrt{5}$ سم، $\sqrt{7}$ سم

3 35 سم، 28 سم، 21 سم

4 6 سم، 7 سم، 4 سم

5 24 سم، 25 سم، 7 سم

6 $5\sqrt{7}$ سم، $2\sqrt{7}$ سم، $5\sqrt{5}$ سم

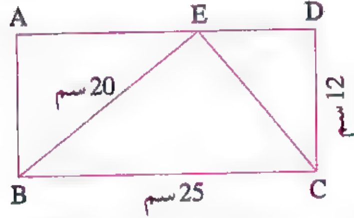


12 فى الشكل المقابل: إذا كان: m (∠A) = 90°،

AB = 12سم، BC = 25سم، CD = 15سم ،

AD = 16سم

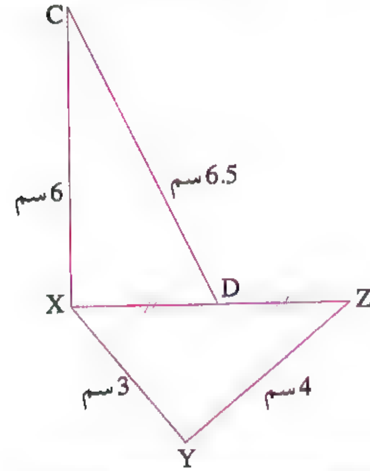
1 أوجد طول $\overline{BD}$ 2 أثبت أن: m (∠BDC) = 90°



13 فى الشكل المقابل:

ABCD مستطيل، أثبت أن المثلث BEC قائم الزاوية،

ثم أوجد مساحته.



14 فى الشكل المقابل:

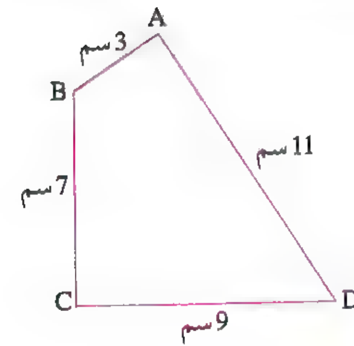
m (∠Y) = 90°، D منتصف $\overline{XZ}$ ،

XY = 3سم ، YZ = 4سم ، CD = 6.5سم ،

XC = 6سم

1 أوجد طول $\overline{XZ}$

2 أثبت أن: m (∠CXD) = 90°



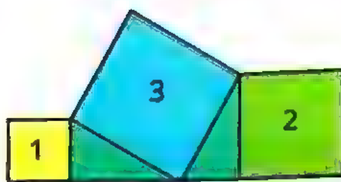
15 فى الشكل المقابل:

أثبت أن: m (∠C) = 90°



16 إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية فى B ، AC = 15 سم ، BC = 9 سم ، AB = x سم،

فأوجد: $\frac{3}{\sqrt{x}}$ فى أبسط صورة.



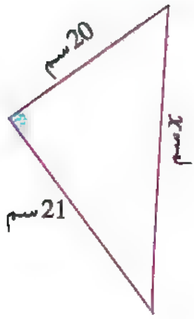
17 فى الشكل التالى:

ثلاثة مربعات: مساحة المربع (1) = 16 سم²،

ومساحة المربع (2) = 48 سم²

أوجد مع البرهان طول ضلع المربع (3)

1 اختر الإجابة الصحيحة:

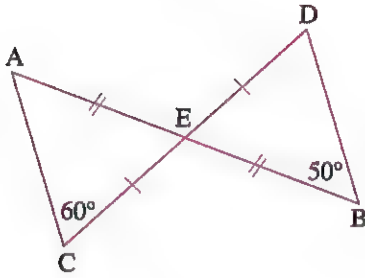


1 في الشكل المقابل: ما قيمة x؟

(أ) 41 (ب) 29
(جـ) $\sqrt{41}$ (د) $\sqrt{29}$

2 أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث منفرج الزاوية؟

(أ) 5 , 5 , 5 (ب) 7 , 24 , 25
(جـ) 14 , 20 , 25 (د) 4 , 5 , 6

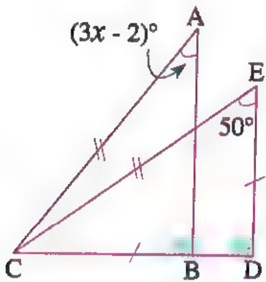


3 في الشكل المقابل: ما قياس $(\angle AEC)$ ؟

(أ) 50° (ب) 70°
(جـ) 60° (د) 110°

4 الأطوال $\sqrt{5}$ سم ، 2 سم ، 1 سم ، تصلح أن تكون أضلاع مثلث ....

(أ) قائم الزاوية (ب) منفرج الزاوية
(جـ) حاد الزوايا (د) متساوى الأضلاع



5 في الشكل المقابل: $\Delta CED \cong \Delta ACB$ فإن: قيمة x = ...

(أ) 50 (ب) 40
(جـ) 14 (د) 52

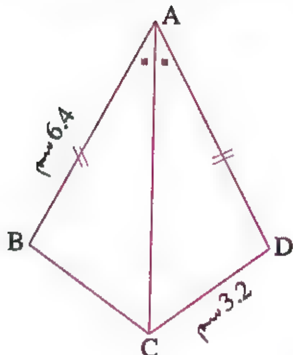
6 مثلث ABC قائم الزاوية في A ، BC = 15سم، AC = 12سم ، فإن AB = ... سم.

(أ) 7 (ب) 9 (جـ) 8 (د) 10

7 إذا كان: $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ ، فإن: .... $\cong$ AC

(أ) XY (ب) YZ (جـ) XZ (د) غير ذلك

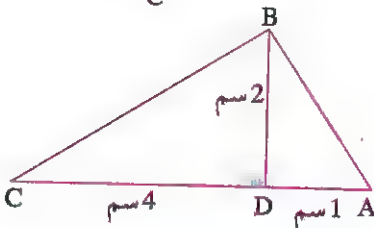
2 أجب عما يأتى:



1 في الشكل المقابل:

(أ) برهن أن: $\Delta ADC \cong \Delta ABC$

(ب) أوجد محيط المضلع ABCD



2 في الشكل المقابل:

مثلث ABC فيه $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ،

AD = 1سم ، CD = 4 سم ، BD = 2سم

أثبت أن: $m(\angle ABC) = 90°$

ذاكر

تطبيقات التوازى
(Applications of Parallelism)





نواتج التعلم

- يعرف الطالب العلاقة بين أطوال أجزاء القواطع المحصورة بين المستقيمات المتوازية.
- يستخدم الطالب الشعاع المرسوم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين.
- يعرف الطالب القطعة المتوسطة فى المثلث.
- يعرف الطالب العلاقة بين القطعة المتوسطة فى المثلث والضلع المقابل لها.
- يستخدم التوازي فى حل المسائل فى الهندسة.

مفردات أساسية

- التوازى (Parallelism)
- القطعة المتوسطة (Midsegment)
- نقطة المنتصف (Midpoint)

فكر وناقش

- فى الشكل المقابل:

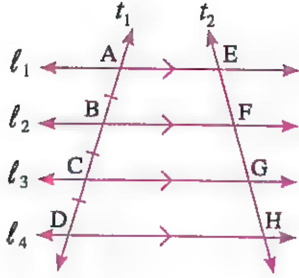
إذا كان طول العارضة الأفقية عند منتصف السلم 0.75 م ، فهل تستطيع تحديد المسافة بين طرفى السلم على الأرض؟



فى هذا الدرس سوف تتعرف على العلاقة بين المستقيمات المتوازية والأجزاء المحصورة بينها؛ وأيضًا العلاقة بين القطعة المتوسطة فى المثلث وأضلاع المثلث؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم بعض تطبيقات التوازى:

أولا نظرية (1 - 3)

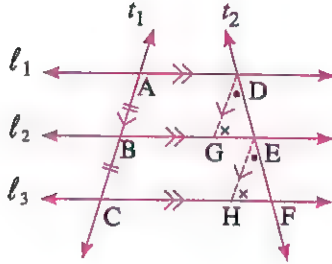


إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأى قاطع آخر تكون متساوية فى الطول.

إذا كانت: $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$ ،

t_1 ، t_2 قاطعان لهم

بحيث: $AB = BC = CD$ فإن: $EF = FG = GH$



لإثبات صحة النظرية (1 - 3)

1 نرسم $\overline{DG}$ ، $\overline{EH}$ توازى المستقيم t_1

2 باستخدام خواص متوازى الأضلاع والتوازى نجد أن:

$m(\angle EDG) = m(\angle FEH)$

$m(\angle DGE) = m(\angle EHF)$

$DG = EH$

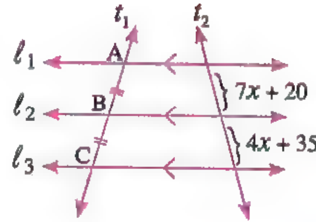
$\therefore \Delta EDG \cong \Delta FEH$ (ASA)

وينتج من التطابق: $DE = EF$

مثال 1

1 فى الشكل المقابل:

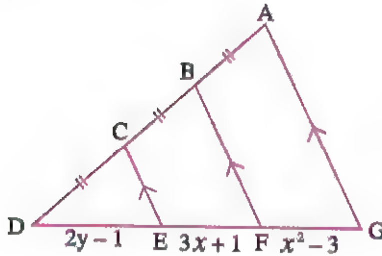
أوجد قيمة x



2 فى الشكل المقابل

أوجد قيمة كل

من x ، y



الحل



1

$\because \ell_1 // \ell_2 // \ell_3 , AB = BC$

$\therefore 7x + 20 = 4x + 35$

$7x - 4x = 35 - 20$

$\therefore 3x = 15$

$\therefore x = \frac{15}{3}$

$\therefore x = 5$

2

$\because \overline{AG} // \overline{BF} // \overline{CE} , AB = BC = CD$

$\therefore FG = EF = DE$

$\therefore x^2 - 3 = 3x + 1$

$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0$

$\therefore (x - 4)(x + 1) = 0$

$x = 4$ أو ($x = -1$) مرفوض

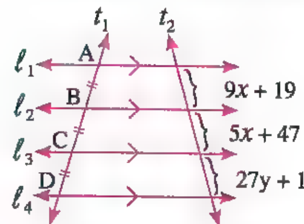
$\because 2y - 1 = 3x + 1$

$\therefore 2y - 1 = 3(4) + 1$

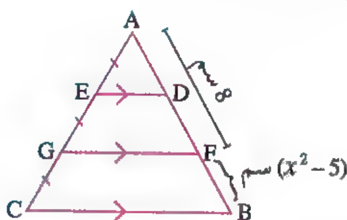
$\therefore 2y - 1 = 13$ $\therefore 2y = 14$ $\therefore y = 7$

س؟ سؤال 1

1 فى الشكل التالى أوجد قيمة كل من y ، x

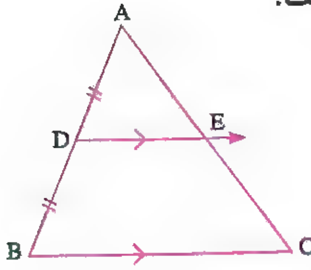


2 فى الشكل التالى أوجد قيمة x



ثانيًا **نظرية (2 - 3)**

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.



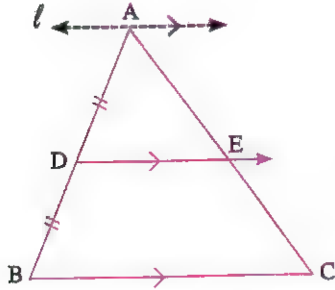
فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كانت: D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$

فإن: E نقطة منتصف $\overline{AC}$

أى أن: $AE = EC$

لإثبات صحة النظرية (2 - 3)



1 نرسم من نقطة A المستقيم ℓ موازيًا كلًّا من $\overrightarrow{DE}$, $\overline{BC}$

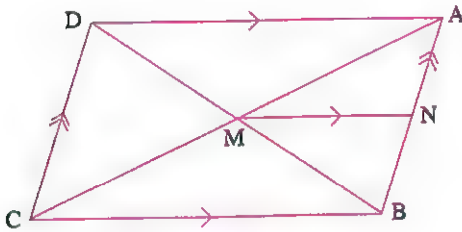
2 من نظرية (1 - 3) نجد أن:

$\ell // \overrightarrow{DE} // \overline{BC}$,

$\because AD = DB$ $\therefore AE = EC$

$\therefore$ E نقطة منتصف $\overline{AC}$

مثال 2 فى الشكل المقابل:



ABCD متوازى أضلاع، M نقطة تقاطع قطرية

$\overrightarrow{MN} // \overline{CB}$

أثبت أن: $AN = BN$

الحل



$\because$ ABCD متوازى أضلاع

$\therefore AM = CM$ (القطران ينصف كلٌ منهما الآخر)

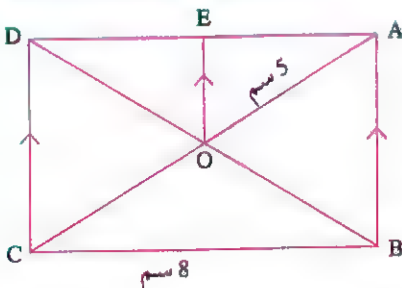
$\therefore$ M منتصف $\overline{AC}$

فى المثلث ABC

$\because \overrightarrow{MN} // \overline{CB}$ ، M منتصف $\overline{AC}$ $\therefore$ N منتصف $\overline{AB}$

$\therefore AN = BN$ (وهو المطلوب)

س؟ سؤال 2



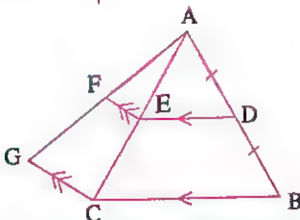
1 فى الشكل المقابل:

ABCD مستطيل تقاطع قطراه فى النقطة O

$\overrightarrow{OE} // \overline{CD}$

إذا كان: $BC = 8$ سم، $OE = 3$ سم، $AO = 5$ سم

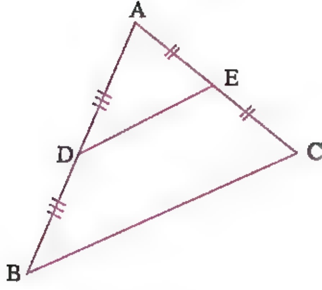
أوجد بالبرهان محيط ΔEOD



2 فى الشكل المقابل:

أثبت أن: F منتصف $\overline{AG}$

ثالثًا القطعة المتوسطة فى المثلث



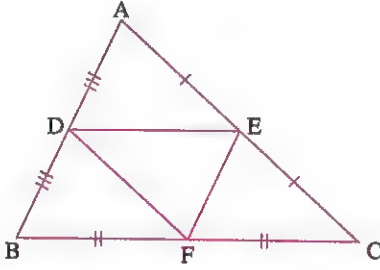
القطعة المتوسطة فى المثلث هى القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث.

إذا كانت: D نقطة منتصف $\overline{AB}$

E نقطة منتصف $\overline{AC}$

فإن: $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى Δ ABC

لاحظ أن



أى مثلث له ثلاث قطع متوسطة.

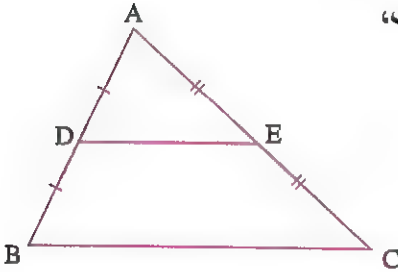
فى الشكل المقابل:

إذا كانت D, F, E منتصفات الأضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ على الترتيب

بالتالى فإن:

$\overline{FE}, \overline{DF}, \overline{DE}$ قطع متوسطة فى المثلث ABC

رابعًا نظرية (3 - 1) نظرية القطعة المتوسطة فى المثلث



القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

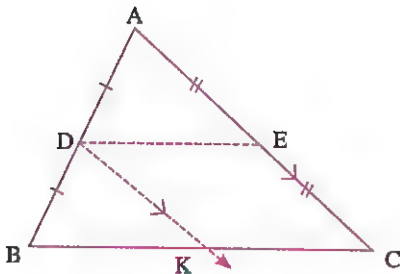
فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى Δ ABC

فإن: 1 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

2 $DE = \frac{1}{2} BC$

لإثبات أن طول القطعة المتوسطة فى المثلث يساوى نصف طول الضلع المقابل لها:



1 نرسم $\overrightarrow{DK}$ موازيًا $\overline{AC}$ ويقطع $\overline{BC}$ فى K

2 $\overline{DE}$ قطعة متوسطة.

أى أن: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ومنها يكون الشكل DKCE متوازى أضلاع.

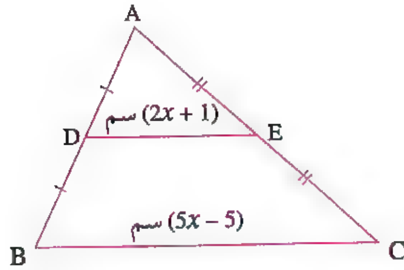
3 باستخدام نظرية (1 - 3) نجد أن K منتصف $\overline{BC}$

$\therefore\ KC = \frac{1}{2} BC$

$\because\ DE = KC$ (من خواص متوازى الأضلاع)

$\therefore\ DE = \frac{1}{2} BC$

مثـال 3 في الشكل المقابـل:



أوجد قيمة x

الحـل

$\because \overline{DE}$ قطعة متوسطة فى المثلث ABC

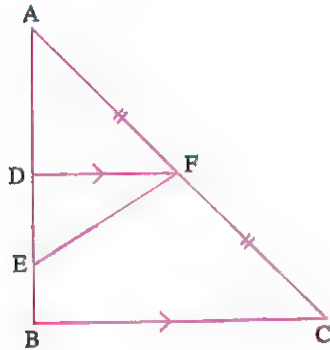
$\therefore BC = 2DE$ $\qquad \therefore DE = \frac{1}{2}BC$

$\therefore 5x - 5 = 2(2x + 1)$

$\therefore 5x - 4x = 2 + 5$ $\qquad \therefore 5x - 5 = 4x + 2$

$\therefore x = 7$

مثـال 4 في الشكل المقابـل:



$\overline{DF} // \overline{BC}$ ، $AF = CF$

$AB = BC = 16$ سم، $EB = 2$ سم

أوجد طول $\overline{EF}$

الحـل

$\because \overline{DF} // \overline{BC}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

$\therefore$ D منتصف $\overline{AB}$ $\qquad \therefore AD = BD$

$\therefore AD = BD = \frac{16}{2} = 8$

$\therefore$ طول $\overline{BD} = 8$ سم

، $\because EB = 2$ سم $\qquad \therefore DE = 6$ سم $\qquad$ (لأن: $8 - 2 = 6$)

، $\because \overline{DF}$ قطعة متوسطة فى ΔABC

(نظرية 3 – 3) $\qquad \therefore DF = \frac{1}{2}BC$

$\therefore DF = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

$\therefore$ طول $\overline{DF} = 8$ سم



$\therefore m(\angle FDB) + m(\angle B) = 180°$ **(زاويتـان داخليتـان وفى جهة واحدة من القاطـع)**

$\therefore \Delta FDE$ قائم الزاوية فى D

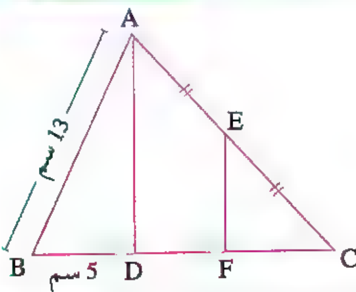
(نظـرية فيثـاغـورث) $\qquad \therefore (EF)^2 = (DF)^2 + (DE)^2 = (8)^2 + (6)^2 = 100$

$\therefore EF = \sqrt{100} = 10$

$\therefore$ طول $\overline{EF} = 10$ سم

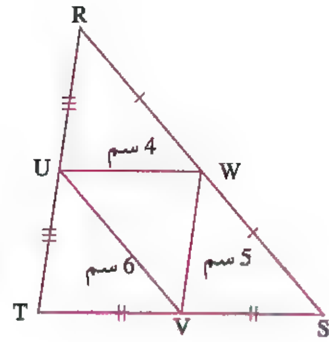
س؟ سؤال 3

في الشكل المقابـل:



أوجد مع البرهان طول $\overline{EF}$

مثـال 5 في الشكل المقابـل:



WV = 5 سم، UW = 4 سم، UV = 6 سم

$\overline{WV}$ ، $\overline{UW}$ ، $\overline{UV}$ قطع متوسطة في Δ RST

احسب محيط Δ RST

الحـل

في المثلث RST ∵ $\overline{VW}$ قطعة متوسطة

$\therefore RT = 2WV = 2 \times 5 = 10$ ▸ $\therefore WV = \frac{1}{2} RT$

∵ $\overline{UV}$ قطعة متوسطة

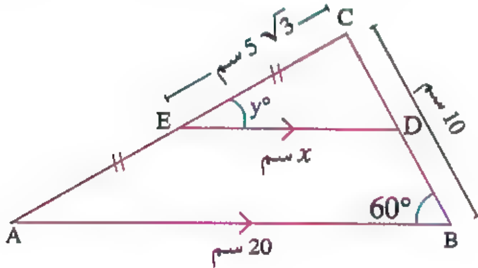
$\therefore RS = 2UV = 2 \times 6 = 12$ ▸ $\therefore UV = \frac{1}{2} RS$

∵ $\overline{UW}$ قطعة متوسطة

$\therefore TS = 2UW = 2 \times 4 = 8$ ▸ $\therefore UW = \frac{1}{2} TS$

∵ محيط المثلث RST = مجموع أطوال أضلاعه ∴ محيط المثلث RST = 30 سم (لأن: $10 + 12 + 8 = 30$ ▸)

مثـال 6 بالاستعانة بالشكل المقابل:



أوجد قيمة كل من x ، y

الحـل

- في المثلث ABC

∵ $\overline{AB}$ // $\overline{ED}$ ، E منتصف $\overline{AC}$

∴ D منتصف $\overline{CB}$

∴ $\overline{ED}$ قطعة متوسطة في Δ ABC

$\therefore x = 10$ $\therefore ED = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 20 = 10$

∵ E منتصف $\overline{AC}$

- في Δ ABC

$AC = 2EC = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\because (AB)^2 = (20)^2 = 400 , (AC)^2 + (BC)^2 = (10\sqrt{3})^2 + (10)^2 = 400$

$\therefore (AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ (عكس نظريـة فيثاغـورس)

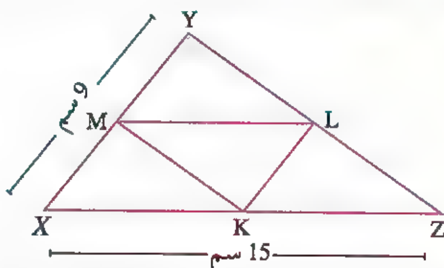
∴ المثلث ABC قائم الزاوية في C

$\therefore m(\angle CDE) = m(\angle B) = 60°$ (زاويتـان متناظـرتان)

$\therefore m(\angle CED) = 180° - (90° + 60°) = 30°$ $\therefore y = 30$

س؟ سؤال 4

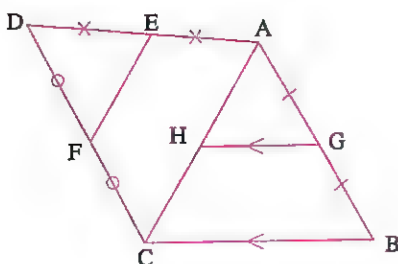
في الشكل المقابـل:



أضلاع المثلث KLM هى القطع المتوسطة في المثلث XYZ القائم الزاوية في Y

احسب محيط المثلث KLM

مثـال 7 فى الشكل المقابـل:



$AC = BC$ ، G منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$

E منتصف $\overline{AD}$ ، F منتصف $\overline{DC}$

أثبــت أن: $GH = FE$

الحـل

فى ΔABC

$\because$ G منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$

$\therefore$ H منتصف $\overline{AC}$ $\therefore$ $\overline{HG}$ قطعة متوسطة فى المثلث ABC

$\therefore GH = \frac{1}{2} BC$

فى ΔDAC

$\because$ E منتصف $\overline{AD}$ ، F منتصف $\overline{DC}$

$\therefore FE = \frac{1}{2} AC$

$\because AC = BC$ $\therefore GH = FE$ (وهو المطلـــوب)

مثـال 8 فى الشكل المقابـل:

$\overline{AD} \parallel \overline{CB}$ ، $AD = \frac{1}{2} CB$

E منتصف $\overline{DB}$ ، F منتصف $\overline{CD}$

أثبــت أن: الشكل AEFD متوازى أضلاع

الحـل

فى المثلث DCB

$\because$ E منتصف $\overline{DB}$ ، F منتصف $\overline{CD}$

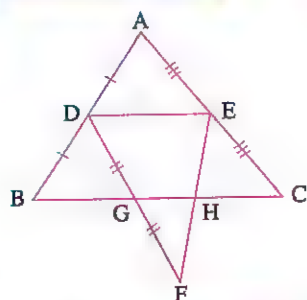
$\therefore \overline{FE} \parallel \overline{CB}$ ، $FE = \frac{1}{2} CB$

$\because \overline{AD} \parallel \overline{CB}$ ، $AD = \frac{1}{2} CB$

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{FE}$ ، $AD = FE$

$\therefore$ الشكل AEFD متوازى أضلاع (وهو المطلـوب)

س سؤال 5



فى الشكـل المقابـل:

إذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، E منتصف $\overline{AC}$ ، G منتصف $\overline{DF}$

فبرهن أن: $BC = 4GH$

بعض تطبيقات التوازى:

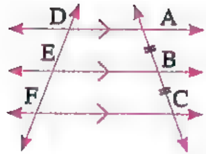
1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين .... الضلع الثالث.

(أ) يوازى (ب) ينصف (جـ) عمودى على (د) لا يقطع

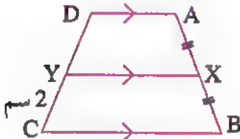
2 طول القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث يساوى .... طول الضلع الثالث.

(أ) ضعف (ب) ثلاثة أمثال (جـ) نصف (د) ربع



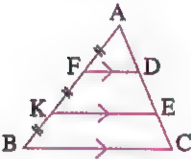
3 فى الشكل المقابل: إذا كان طول $\overline{DF} = 15$ سم، فما طول $\overline{EF}$؟ ....

(أ) 10 سم (ب) 7.5 سم
(جـ) 5 سم (د) 2.5 سم



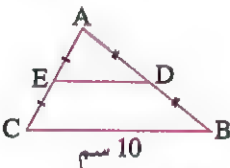
4 فى الشكل المقابل: إذا كان طول $\overline{YC} = 2$ سم، فما طول $\overline{DY}$؟ ....

(أ) 2 سم (ب) 4 سم
(جـ) 8 سم (د) 16 سم



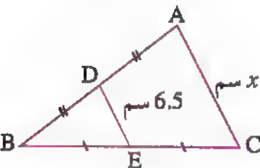
5 فى الشكل المقابل: إذا كان طول $\overline{AC} = 12$ سم، فما طول $\overline{AE}$؟ ....

(أ) 3 سم (ب) 6 سم
(جـ) 4 سم (د) 8 سم



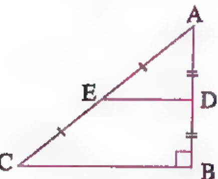
6 فى الشكل المقابل: إذا كان طول $\overline{CB} = 10$ سم، فما طول $\overline{ED}$؟ ....

(أ) 2.5 سم (ب) 4
(جـ) 5 سم (د) 10 سم



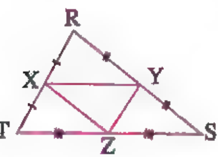
7 في الشكل المقابل: ما قيمة x؟ ....

(أ) 13 سم (ب) 6.5 سم
(جـ) 17 سم (د) 3.25 سم



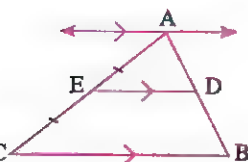
8 في الشكل المقابل: ما قياس $(\angle ADE)$؟ ....

(أ) 45° (ب) 90°
(جـ) 60° (د) 75°



9 في الشكل المقابل: إذا كان محيط المثلث XYZ = 20 سم، فما محيط المثلث RTS؟ ....

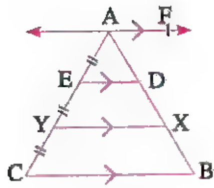
(أ) 10 سم (ب) 20 سم
(جـ) 40 سم (د) 60 سم



10 في الشكل المقابل: .... = AD : AB

(أ) 1 : 1 (ب) 1 : 2
(جـ) 1 : 3 (د) 1 : 4

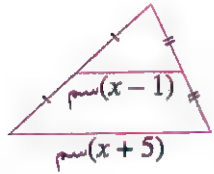
11 في الشكل المقابل: .... = AD : AB



(أ) 2 : 1 (ب) 1 : 2

(جـ) 1 : 3 (د) 2 : 3

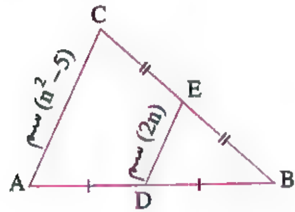
12 في الشكل المقابل: ما قيمة x؟ ....



(أ) 4 (ب) 5

(جـ) 6 (د) 7

13 في الشكل المقابل: ما قيمة n؟ ....

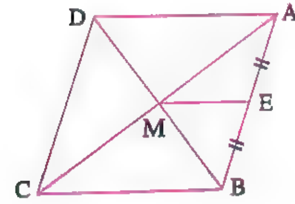


(أ) 5 (ب) 1

(جـ) 4 (د) 2

14 في الشكل المقابل: إذا كان محيط المعين ABCD = 32 سم،

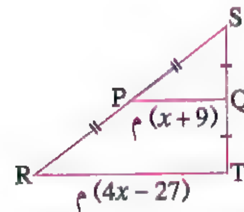
E منتصف $\overline{AB}$ ، فإن ME = ...



(أ) 16 سم (ب) 8 سم

(جـ) 4 سم (د) 2 سم

15 في الشكل المقابل: ما طول $\overline{RT}$؟ ....

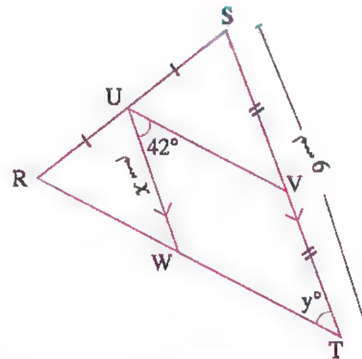


(أ) 9 م (ب) 21 م

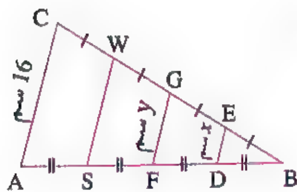
(جـ) 45 م (د) 63 م

2 أوجد قيمة x ، y ، n في كل مما يأتي:

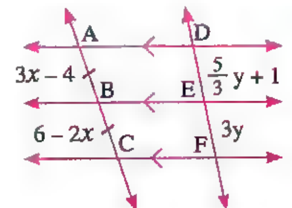
1



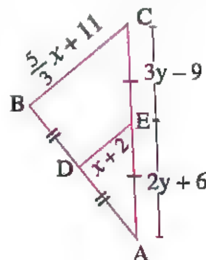
2



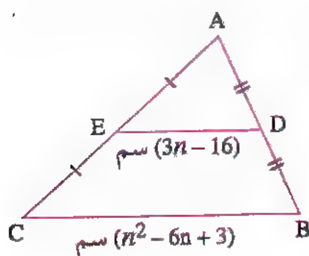
3

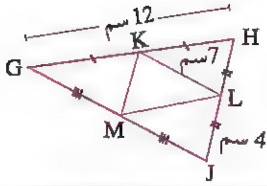


4



5

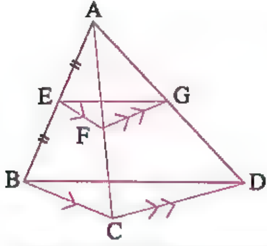




3 فى الشكل المقابل:

أوجد محيط المثلث KLM، ومحيط المثلث GHJ

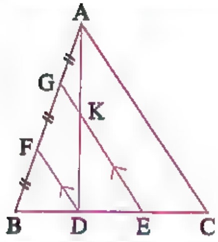
ثم أوجد النسبة بين محيطى المثلثين KLM ، GHJ



4 فى الشكل المقابل:

إذا كانت E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{EF} // \overline{BC}$ ، $\overline{FG} // \overline{CD}$

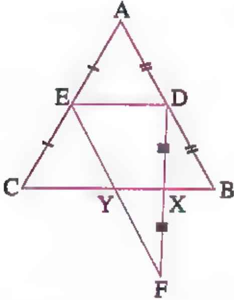
فبرهن أن: $BD = 2\,EG$



5 فى الشكل المقابل:

$GK = 8$ سم ، $\overline{GE} // \overline{FD}$ ، $AG = GF = FB$

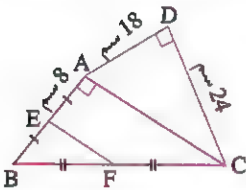
أوجد طول $\overline{KE}$



6 فى الشكل المقابل:

إذا كان $BC = 12$ سم، **فأوجد مع البرهان**

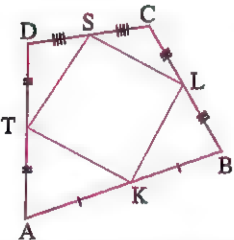
طول $\overline{XY}$



7 فى الشكل المقابل:

ABCD شكل رباعى فيه: E ، F منتصفا $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ على الترتيب

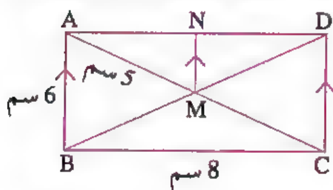
أوجد مساحة $\Delta\,BEF$



8 فى الشكل المقابل:

K ، L ، S ، T منتصفات أضلاع الشكل الرباعى ABCD

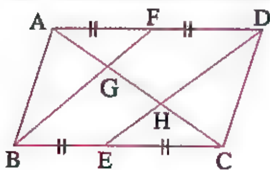
أثبت أن: الشكل KLST متوازى أضلاع



9 فى الشكل المقابل:

ABCD مستطيل، $AB = 6$ سم، $BC = 8$ سم، $AM = 5$ سم

رسم $\overline{BA} // \overline{MN}$ أوجد بالبرهان محيط $\Delta\,AMN$



10 فى الشكل المقابل:

ABCD متوازى أضلاع، إذا كانت E ، F منتصفى $\overline{BC}$ ، $\overline{AD}$ على الترتيب

فأثبت أن: $AC = 3\,AG$

11 ديكور:

الشكل المقابل يمثل مكتبة خشبية على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 3 م ، وبداخلها ثلاثة أرفف زجاجية.

ما طول كل رف من الأرفف الثلاثة؟



12 تصميم هندسى:

عند تصميم أرجوحة كما بالشكل المقابل كان طول العارضة الأفقية الواصلة بين منتصفى الساقين يساوى x قدم، حيث $3 \le x \le 4$

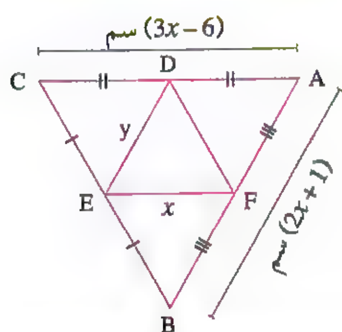
أوجد أقل بُعد بين طرفى الساقين على الأرض.





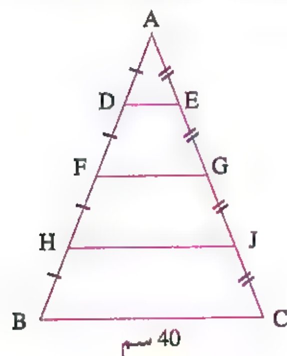
13 فى الشكل المقابل:

احسب قيمة كل من x ، y

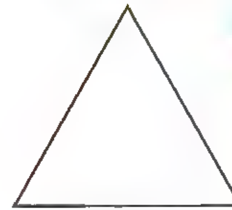


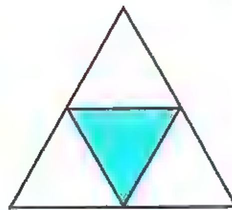
14 فى الشكل المقابل:

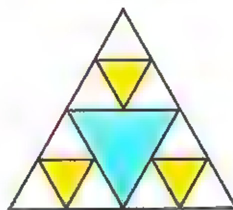
أوجد طول كل من: $\overline{DE}$ ، $\overline{FG}$ ، $\overline{HJ}$

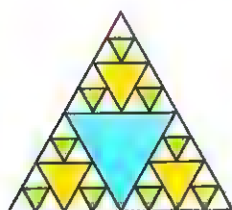


15


شكل (1)


شكل (2)


شكل (3)


شكل (4)

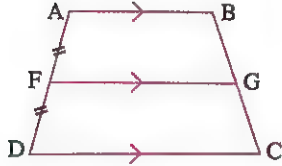
شكل (1) يمثل مثلثًا محيطه 8 سم، وتم تلوين المثلث الناتج من القطع المتوسطة الثلاثة كما بشكل (2)، ثم تكرار ذلك على المثلثات غير الملونة للحصول على شكل (3) ثم بذات النمط تكون شكل (4)

احسب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (3)، وهل تستطيع حساب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (4)؟

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث .... الضلع الثالث.

(أ) عمودية على (ب) توازى (جـ) تنصف (د) ليس شيء مما سبق



2 فى الشكل المقابل:

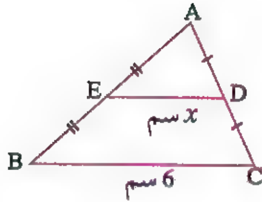
BG : BC = ... : ....

(أ) 1 : 1 (ب) 1 : 2

(جـ) 2 : 3 (د) 2 : 1

3 إذا كان: $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ ، $m(\angle A) + m(\angle B) = 150°$ فإن: $m(\angle Z)$ يساوى ....

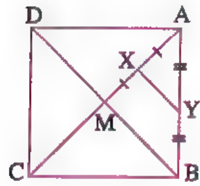
(أ) 150° (ب) 30° (جـ) 50° (د) 40°



4 فى الشكل المقابل: ما قيمة x ؟ ....

(أ) 12 (ب) 6

(جـ) 9 (د) 3

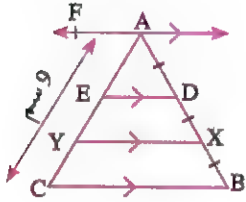


5 فى الشكل المقابل: ABCD مربع فيه: Y ، X منتصفا $\overline{AB}$ ، $\overline{AM}$ على الترتيب،

AC = 24 سم، فإن طول $\overline{XY}$ = ...

(أ) 3 سم (ب) 6 سم

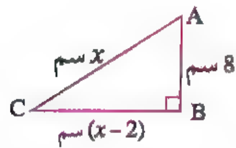
(جـ) 12 سم (د) 18 سم



6 فى الشكل المقابل: إذا كان طول $\overline{AC}$ = 9 سم، فما طول $\overline{AY}$؟ ....

(أ) 3 سم (ب) 6 سم

(جـ) 4 سم (د) 9 سم

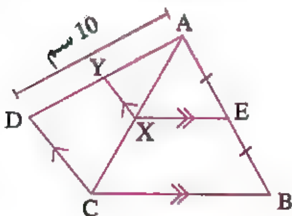


7 فى الشكل المقابل: ما قيمة x ؟ ....

(أ) 10 (ب) 17

(جـ) 64 (د) 68

2 أجب عما يأتى:



1 فى الشكل المقابل: إذا كانت E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{XY} // \overline{CD}$ ، $\overline{EX} // \overline{BC}$ ،

AD = 10 سم، فأوجد طول $\overline{AY}$

2 حدد نوع المثلث الذى أطوال أضلاعه: $\frac{3}{5}$ سم، $\frac{\sqrt{6}}{5}$ سم، $\frac{\sqrt{3}}{5}$ سم بالنسبة لقياسات زواياه.

ذاكر

4

متوسطات المثلث
(Medians of the Triangle)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب على مفهوم متوسطات المثلث.
- يتعرف الطالب على نقطة تقاطع متوسطات المثلث.
- يعرف الطالب العلاقة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة وطول الوتر فى المثلث القائم الزاوية.
- يستخدم الطالب متوسطات المثلث فى حل مشاكل حياتية.

مفردات أساسية

- متوسطات (Medians)
- نقطة الاتزان (Equilibrium Point)
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث (Centroid)

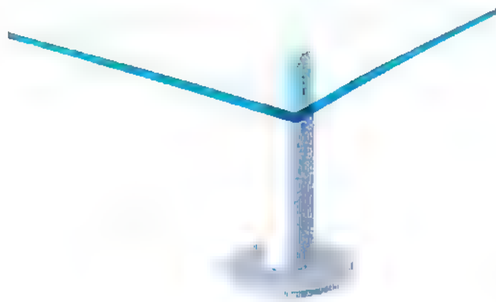


فكر وناقش

- يبتكر مصمم ديكور طاولة مخصصة لأحد العملاء.

سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجى يحتاج إلى التوازن على دعامة واحدة.

ففى أى نقطة يجب وضع الدعامة؟



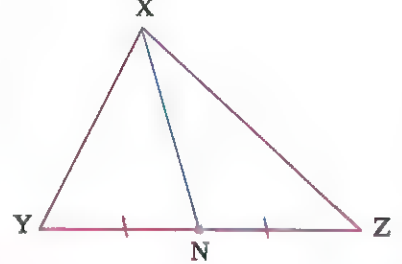
- فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إيجاد نقطة تقاطع متوسطات المثلث، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم متوسط المثلث:

متوسط المثلث: هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رءوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

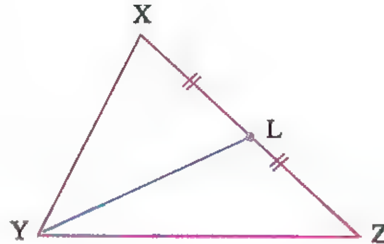
- كل مثلث له ثلاثة متوسطات كالتالى:

فى المثلث XYZ:



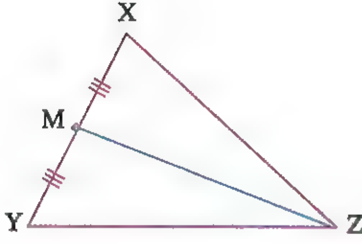
$\because$ N منتصف $\overline{YZ}$

$\therefore$ $\overline{XN}$ متوسط



$\because$ L منتصف $\overline{XZ}$

$\therefore$ $\overline{YL}$ متوسط



$\because$ M منتصف $\overline{XY}$

$\therefore$ $\overline{ZM}$ متوسط

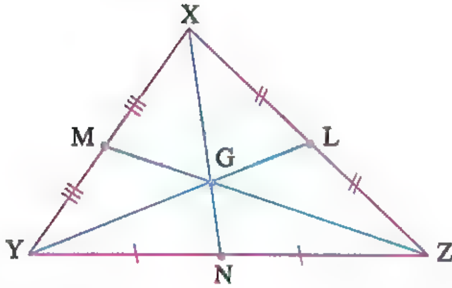
نظرية (4 - 1) متوسطات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

فى الشكل المقابل:

إذا كانت: $\overline{XN}$ ، $\overline{YL}$ ، $\overline{ZM}$ متوسطات المثلث XYZ ،

فإن: $\overline{XN} \cap \overline{YL} \cap \overline{ZM} = \{G\}$

أى أن: النقطة G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث XYZ



نقاط هامة

- إذا تقاطع متوسطان فى نقطة داخل المثلث، فإن هذه النقطة هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث.
- تسمى نقطة تقاطع متوسطات المثلث بالمركز الهندسى للمثلث أو (نقطة الاتزان).

نظرية (4 - 2) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس.

فى الشكل المقابل:

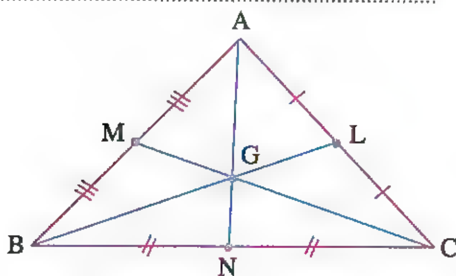
إذا كانت: G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

فإن:

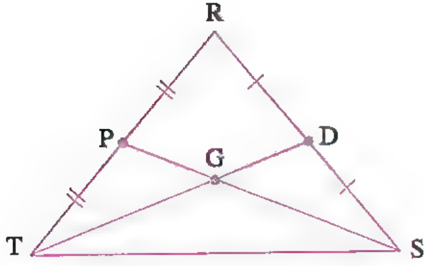
- $AG = 2\,GN$ ومنها ← $GN = \frac{1}{2} AG$
- $AG = \frac{2}{3} AN$ ومنها ← $AN = \frac{3}{2} AG$
- $GN = \frac{1}{3} AN$ ومنها ← $AN = 3\,GN$

لاحظ أن

نقطة تقاطع متوسطات تقسم كلًّا منها بنسبة 1:2 من جهة القاعدة.



مثـال 1 فى الشكل المقابل:



إذا كانت G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث RST

فأكمل ما يأتى:

1 SG = ... SP

2 GD = ... TG

3 TD = ... TG

4 GP = ... SP

الحـل

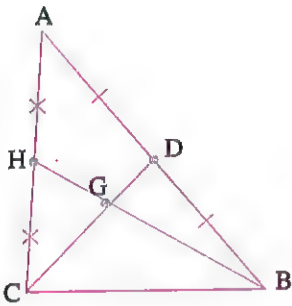
1 $\frac{2}{3}$

2 $\frac{1}{2}$

3 $\frac{3}{2}$

4 $\frac{1}{3}$

مثـال فى الشكل المقابل:



D ، H منتصفـات $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ على الترتيب

BH = 9 سم ، GD = 2 سم

أوجد طول $\overline{GH}$ ، $\overline{CG}$

الحـل

فى المثلـث ABC

∵ D منتصف $\overline{AB}$ ∴ $\overline{CD}$ متوسـط

∵ H منتصف $\overline{AC}$ ∴ $\overline{BH}$ متوسـط

$\because \overline{CD} \cap \overline{BH} = \{G\}$

∴ G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

$\therefore GH = \frac{1}{3} BH$

$\therefore GH = \frac{1}{3} \times 9 = 3$

∴ طول $\overline{GH}$ = 3 سم

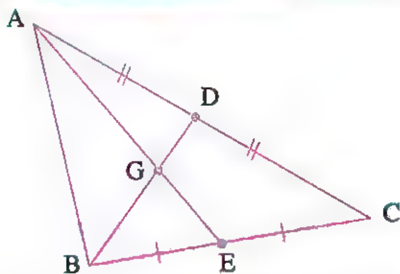
$\therefore CG = 2\ GD$

$\therefore CG = 2 \times 2 = 4$

∴ طول $\overline{CG}$ = 4 سم

س؟ سؤال 1

فى الشكل المقابـل:

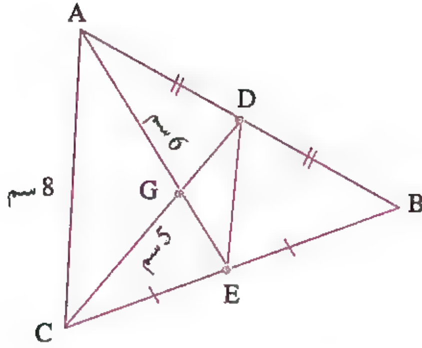


D ، E منتصفـات $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ على الترتيب

GD = 3 سم ، AE = 15 سم

أوجد طول $\overline{BD}$ ، $\overline{AG}$

مثـال 3 في الشكل المقابل:



G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

AC = 8 سم ، GC = 5 سم ، AG = 6 سم

أوجد محيط المثلث: GDE

الحـل

في المثلـث ABC

∵ G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

$\therefore DG = \frac{1}{2} GC$ $\quad \therefore DG = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$

∴ طول $\overline{DG} = 2.5$ سم

$\therefore EG = \frac{1}{2} AG$ $\quad \therefore EG = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

∴ طول $\overline{EG} = 3$ سم

∵ $\overline{DE}$ قطعة متوسطة في المثلث ABC

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$ $\quad \therefore DE = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

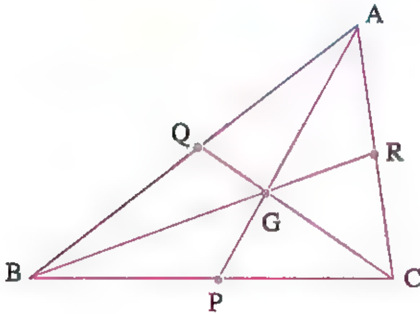
∴ طول $\overline{DE} = 4$ سم

∵ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

∴ محيط المثلث GDE = 9.5 سم (لأن: $2.5 + 3 + 4 = 9.5$)



مثـال 4 في الشكل المقابل:



إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

وكان: AP = 21 سم ، GQ = 5 سم ، BG = 16 سم

أوجد طول كل من: $\overline{PG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BR}$

الحـل

∵ G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

$\therefore PG = \frac{1}{3} AP = \frac{1}{3} \times 21 = 7$

∴ طول $\overline{PG} = 7$ سم

$\therefore CG = 2\,QG = 2 \times 5 = 10$

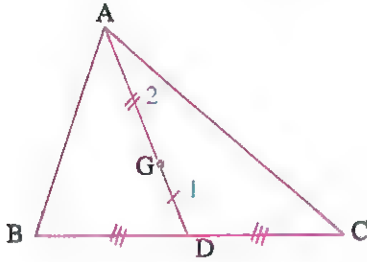
∴ طول $\overline{CG} = 10$ سم

$\therefore BR = \frac{3}{2} BG = \frac{3}{2} \times 16 = 24$

∴ طول $\overline{BR} = 24$ سم

نتيجة

- النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث.



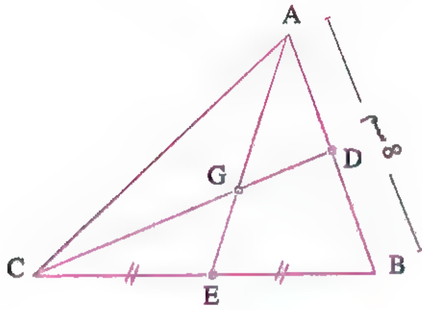
فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC

وكانت: $G \in \overline{AD}$ بحيث $AG = 2\,GD$

فإن: G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

مثال فى الشكل المقابل:



E منتصف $\overline{CB}$ ، $AG = 2\,GE$ ، AB = 8 سم

أوجد طول $\overline{AD}$

الحل

فى المثلث ABC

$\because$ E منتصف $\overline{CB}$ $\therefore$ $\overline{AE}$ متوسط

$\because AG = 2\,GE$

$\therefore$ G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

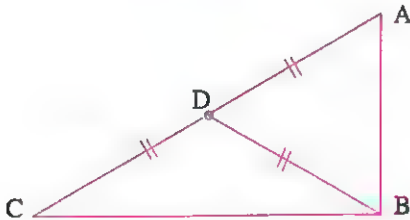
$\therefore$ $\overline{CD}$ متوسط $\therefore$ D منتصف $\overline{AB}$

$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

$\therefore$ طول $\overline{AD}$ = 4 سم



نظرية (3-4) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.

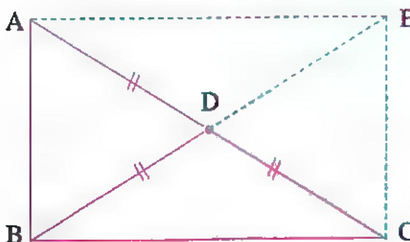


فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{BD}$ متوسطًا مرسومًا من رأس القائمة B

فإن: $BD = AD = DC = \frac{1}{2} AC$

إثبات صحة نظرية (3-4):



لإثبات صحة نظرية (3 – 4) نكمل رسم المستطيل ABCE

$\because$ قطرى المستطيل $\overline{AC}$ ، $\overline{BE}$ متساويان فى الطول

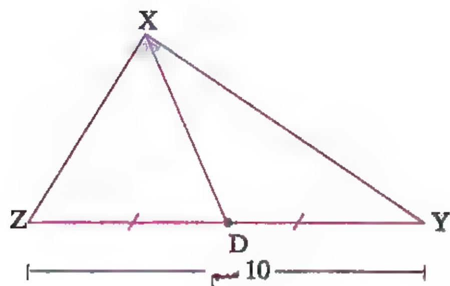
وينصف كل منهما الآخر

$\therefore BD = AD = DC = DE = \frac{1}{2} AC$

مثـال 6 في الشكل المقابل:

$m(\angle ZXY) = 90°$ ، D منتصف $\overline{ZY}$ ، ZY = 10 سم

أوجد طول: $\overline{XD}$



الحل

في المثلـث XZY

∵ D منتصف $\overline{ZY}$ ∴ $\overline{XD}$ متوسـط

∵ $m(\angle ZXY) = 90°$

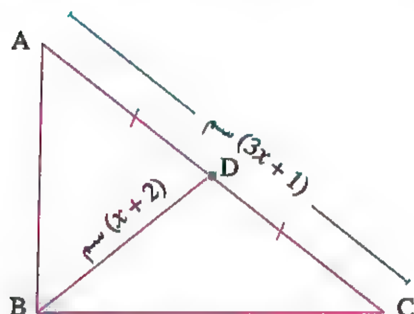
∴ $XD = \frac{1}{2} ZY = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

∴ طول $\overline{XD}$ = 5 سم

مثـال 7 في الشكل المقابل:

D منتصف $\overline{AC}$ ، $m(\angle ABC) = 90°$

AC = $(3x + 1)$ سم ، BD = $(x + 2)$ سم أوجد طول: $\overline{AC}$



الحل

في المثلـث ABC

∵ D منتصف $\overline{AC}$ ∴ $\overline{BD}$ متوسـط

∵ $m(\angle ABC) = 90°$

$\therefore BD = \frac{1}{2} AC \longrightarrow \therefore x + 2 = \frac{1}{2}(3x + 1)$

$\therefore x + 2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \longrightarrow \therefore \frac{3}{2}x - x = 2 - \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \longrightarrow \therefore x = 3$

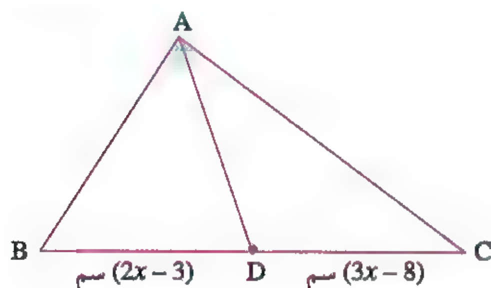
$AC = 3x + 1 = 3(3) + 1 = 10$

∴ طول $\overline{AC}$ = 10 سم

مثـال 8 في الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا في المثلث ABC القائم الزاوية في A

فأوجد طول: $\overline{AD}$



الحل

∵ المثلـث ABC قائم الزاوية في A ، $\overline{AD}$ متوسط

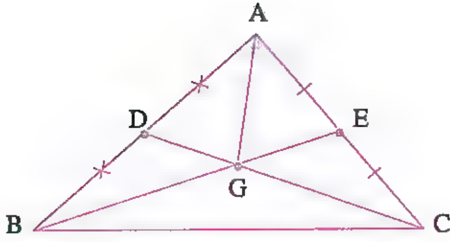
$\therefore DC = DB \longrightarrow \therefore 3x - 8 = 2x - 3$

$\therefore 3x - 2x = 8 - 3 \longrightarrow \therefore x = 5$

$\therefore AD = BD = 2 \times 5 - 3 = 7$

∴ طول $\overline{AD}$ = 7 سم

مثـال 9 في الشكل المقابل:

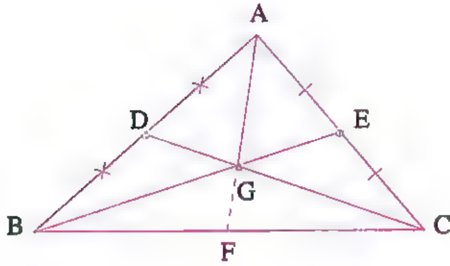


إذا كانت D ، E منتصفي $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ على الترتيب

، $m(\angle BAC) = 90^\circ$ ، $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{G\}$

، AC = 9 سم ، AG = 5 سم أوجد طول $\overline{AB}$

الحل



العمـــل: نرسم $\overrightarrow{AG}$ حيث $\overrightarrow{AG} \cap \overline{BC} = \{F\}$ ، $F \in \overline{BC}$

البرهـــان: في المثلث ABC

∵ E منتصف $\overline{AC}$ ∴ $\overline{BE}$ متوسط

∵ D منتصف $\overline{AB}$ ∴ $\overline{CD}$ متوسط

$\because \overline{BE} \cap \overline{CD} = \{G\}$

∴ G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

∴ $\overline{AF}$ متوسط

$\therefore AF = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \times 5 = 7.5$

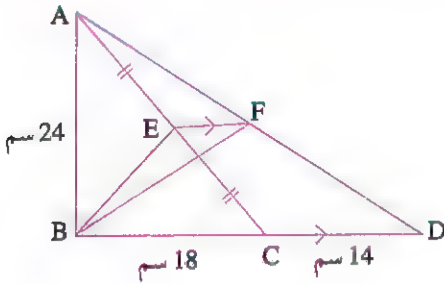
$\because m(\angle BAC) = 90^\circ$ ، $\therefore BC = 2\,AF = 2 \times 7.5 = 15$

$\therefore (AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2 = (15)^2 - (9)^2 = 144$ ـــــ (من نظرية فيثاغورس)

$\therefore AB = \sqrt{144} = 12$

∴ طول $\overline{AB}$ = 12 سم

مثـال 10 في الشكل المقابل:



إذا كانت: $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ ، $C \in \overline{BD}$

E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{EF} // \overline{CD}$

AB = 24 سم ، BC = 18 سم ، CD = 14 سم فأوجد محيط المثلث: BEF

الحل

- في المثلث ABC : $\because m(\angle ABC) = 90^\circ$

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ ـــــ (من نظرية فيثاغورس)

$= (24)^2 + (18)^2 = 900$ $\therefore AC = \sqrt{900} = 30$

، ∵ E منتصف $\overline{AC}$ ∴ $\overline{BE}$ متوسط

$\therefore BE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 30 = 15$

- في المثلث ABD : $\because m(\angle ABD) = 90^\circ$

$\therefore (AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 = (24)^2 + (32)^2 = 1600$ $\therefore AD = \sqrt{1600} = 40$

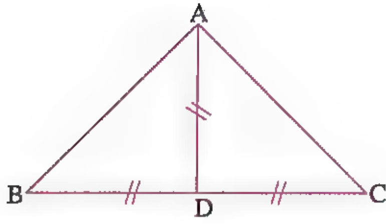
- في المثلث ACD : ∵ E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{EF} // \overline{CD}$ ∴ F منتصف $\overline{AD}$

$\therefore BF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 40 = 20$ $\therefore EF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \times 14 = 7$

∴ محيط المثلث BEF = 15+ 20 + 7 = 42 سم

عكس نظرية (1-4)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس، فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.



فى الشكـل المقابـل:

إذا كان : $\overline{AD}$ متوسطًا مرسومًا من الرأس A

، وكان: $AD = BD = CD = \frac{1}{2} BC$

فـإن: $m(\angle BAC) = 90°$

مثـال 11 فى الشكل المقابـل:

$m(\angle BCA) = 90°$

F منتصف $\overline{AB}$ ، $CF = DF$

أثبت أن: $m(\angle ADB) = 90°$

الحـل

فى المثلث BCA :

$\because$ F منتصف $\overline{BA}$ $\therefore$ $\overline{CF}$ متوسط

$\therefore CF = \frac{1}{2} BA$ $\because m(\angle BCA) = 90°$

$\therefore DF = \frac{1}{2} BA$ $\because CF = DF$

فى المثلث BDA :

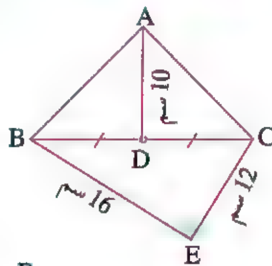
$\because$ F منتصف $\overline{BA}$ $\therefore$ $\overline{DF}$ متوسط

$\therefore m(\angle ADB) = 90°$ $\because DF = \frac{1}{2} BA$



سؤال 2

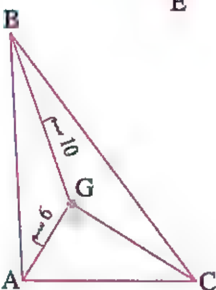
1 فى الشكـل المقابـل:



إذا كانت D منتصف $\overline{BC}$

أثبـت أن: $m(\angle BAC) = 90°$

2 فى الشكـل المقابـل:



G هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC

BG = 10 سم ، AG = 6 سم ، $m(\angle AGC) = 90°$

(أ) أوجـد طـول: $\overline{AC}$ ، $\overline{GC}$

(ب) أوجـد مساحة المثلـث AGC

أسئلة الكتاب المدرسي

متوسط المثلث

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية = ...

(أ) صفر (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

2 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة .... من جهة الرأس..

(أ) 2 : 1 (ب) 2 : 1 (جـ) 2 : 3 (د) 3 : 1

3 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة .... من جهة القاعدة.

(أ) 2 : 1 (ب) 2 : 1 (جـ) 2 : 3 (د) 3 : 1

4 فى المثلث ABC إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا، M نقطة تقاطع متوسطاته فإن: DM = ... AD

(أ) 2 (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{1}{3}$

5 إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا، فى المثلث ABC ، G هى نقطة تقاطع متوسطاته فإن: AG ....= AD

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

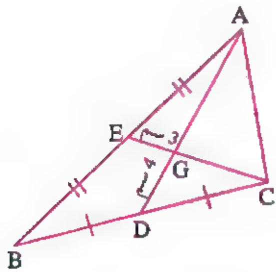
6 إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC ، G هى نقطة تقاطع متوسطاته فإن: .... = AG : AD

(أ) 2 : 1 (ب) 2 : 1 (جـ) 3 : 2 (د) 2 : 3

7 فى المثلث ABC إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا، M نقطة تقاطع متوسطاته، طول $\overline{AM}$ = 6 سم ، فإن طول $\overline{MD}$ = ... سم.

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 12 (د) 18

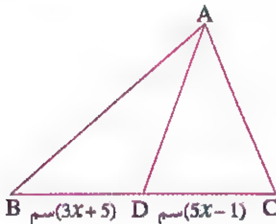
8 فى الشكل المقابل: إذا كانت G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، GE = 3 سم ، GD = 4 سم ، فأى مما يلى صحيح؟



(أ) AG = 6 سم (ب) CG = 8 سم

(جـ) CE = 9 سم (د) AG = 12 سم

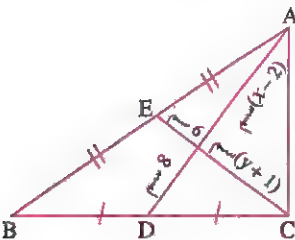
9 فى الشكل المقابل: $\overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC ما طول $\overline{BC}$؟



(أ) 3 سم (ب) 6 سم

(جـ) 14 سم (د) 28 سم

10 فى الشكل المقابل: $x - y =$ ....



(أ) 0 (ب) 7

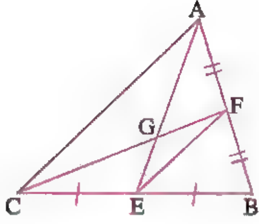
(جـ) 14 (د) 29

11 في الشكل المقابل: $\overline{AE}$, $\overline{CF}$ متوسطان في المثلث ABC ، $\overline{AE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

CG = 12سم ، AE = 15سم ، AC = 20سم ، فما محيط المثلث GEF ؟

(أ) 18 سم (ب) 21 سم

(جـ) 24 سم (د) 27 سم

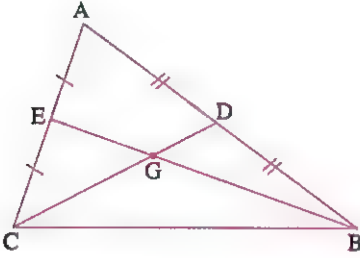


2 في الشكل المقابل:

D ، E منتصفا $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ على الترتيب

طول $\overline{CD}$ = 15سم ، طول $\overline{BE}$ = 18سم ،

أوجد: طول كل من: $\overline{GD}$, $\overline{GB}$, $\overline{CG}$

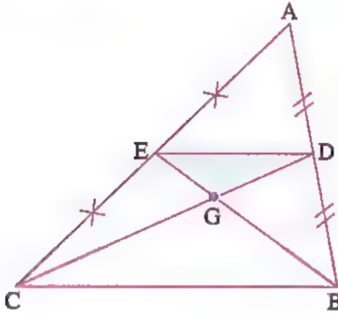


3 في الشكل المقابل:

D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{CD} \cap \overline{BE} = \{G\}$

وطول $\overline{CB}$ = 8سم ، طول $\overline{CG}$ = 6سم ،

وطول $\overline{BE}$ = 6سم ، أوجد محيط المثلث EGD



4 في الشكل المقابل:

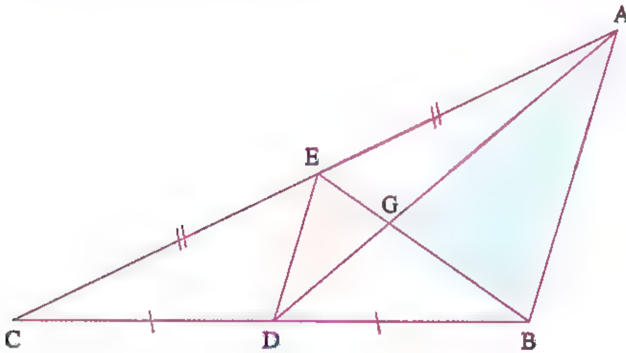
D منتصف $\overline{CB}$ ، E منتصف $\overline{CA}$ ،

طول $\overline{ED}$ = 4سم ، طول $\overline{BG}$ = 4 سم ،

طول $\overline{AD}$ = 9سم

أوجد: 1 محيط المثلث EDG

2 محيط المثلث AGB



5 في الشكل المقابل:

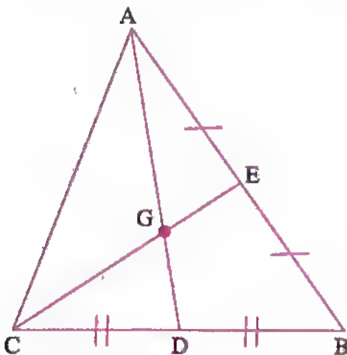
إذا كان $\overline{GE} = x$ سم ، طول $\overline{CG} = (4x - 6)$ سم،

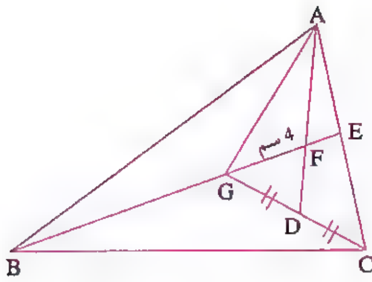
طول $\overline{AG} = (5x - 7)$ سم

فأوجد الأطوال الآتية:

1 $\overline{CG}$ 2 $\overline{CE}$

3 $\overline{AG}$ 4 $\overline{GD}$



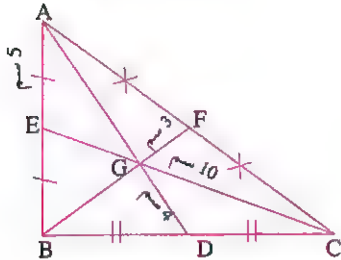


6 في الشكل المقابل:

G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، DC = DG

GF = 4 سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{BE}$



7 في الشكل المقابل:

G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، AE = 5سم ،

CG = 10سم ، GD = 4سم ، GF = 3سم ،

أوجد بالبرهان مساحة المثلث ABD

المتوسط الخارج من رأس الزاوية القائمة

8 اختر الإجابة الصحيحة:

1 فى المثلث القائم الزاوية النسبة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة وطول الوتر يساوى ....

(أ) 2 : 1 (ب) 2 : 1 (جـ) 3 : 2 (د) 3 : 1

2 المثلث ABC قائم الزاوية فى B ، D منتصف $\overline{AC}$ فإن: .... = BD

(أ) $\frac{1}{2}$ AC (ب) AC (جـ) $\frac{1}{2}$ BC (د) AB

3 فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B ، إذا كان طول $\overline{AC}$ = 10سم ، D منتصف $\overline{AC}$ فإن طول $\overline{BD}$ = ... سم.

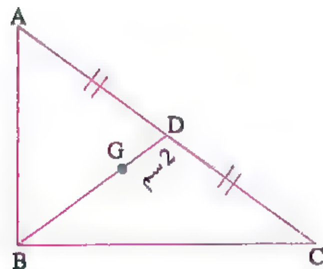
(أ) 20 (ب) 5 (جـ) 10 (د) 8

4 المثلث PQR قائم الزاوية فى P ، وطول المتوسط الخارج من P يساوى 3سم ، فإن طول $\overline{QR}$ = ... سم.

(أ) 3 (ب) 8 (جـ) 6 (د) 9

5 المثلث ABC قائم الزاوية فى B ، إذا كان طول $\overline{AB}$ = 16سم، طول $\overline{BC}$ = 12سم، D منتصف $\overline{AC}$ ، فإن طول $\overline{BD}$ = ... سم.

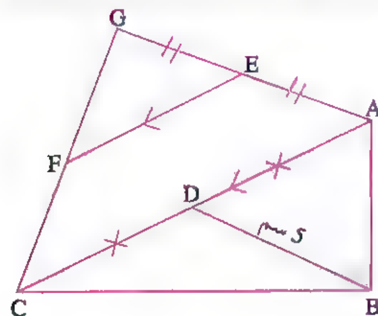
(أ) 20 (ب) 10 (جـ) 8 (د) 6



6 فى الشكل المقابل: إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC ، القائم الزاوية فى B ، GD = 2سم، فما طول $\overline{AC}$ ؟

(أ) 8 سم (ب) 12 سم

(جـ) 18 سم (د) 24 سم



9 في الشكل المقابل:

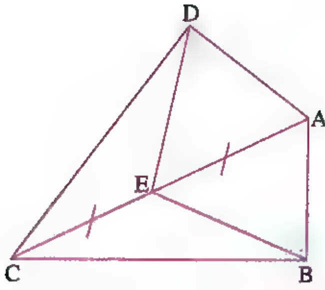
m (∠ABC) = 90°,

D منتصف $\overline{AC}$ ، وطول $\overline{DB}$ = 5سم ،

E منتصف $\overline{AG}$ ، $\overline{FE}$ // $\overline{CA}$

أوجد بالبرهان طول $\overline{FE}$

10 في الشكل المقابل:

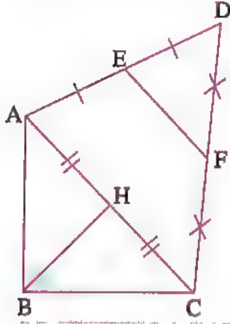


ABCD شكل رباعي فيه:

$m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = 90^\circ$ ، E منتصف $\overline{AC}$ ،

أثبت أن: BE = DE

11 في الشكل المقابل:

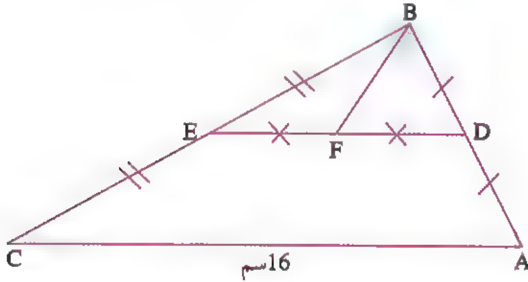


إذا كان $\overline{BH}$ متوسطًا في المثلث ABC القائم الزاوية في B

E ، F منتصفي $\overline{DA}$ ، $\overline{CD}$ على الترتيب.

فأثبت أن: BH = EF

12 في الشكل المقابل:



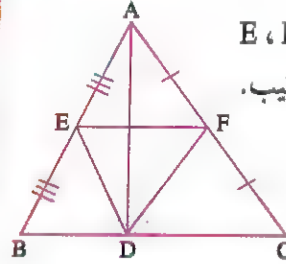
المثلث ABC قائم الزاوية في B ،

D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{BC}$

F منتصف $\overline{ED}$ ، وطول $\overline{AC}$ = 16سم .

أوجد طول كل من: $\overline{ED}$ ، $\overline{FB}$

13 في الشكل المقابل:



ABC مثلث فيه $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، F ، E

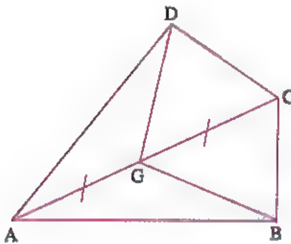
منتصفي $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ على الترتيب.

أثبت أن:

محيط المثلث EFD

$= \frac{1}{2}$ محيط المثلث ABC

14 في الشكل المقابل:



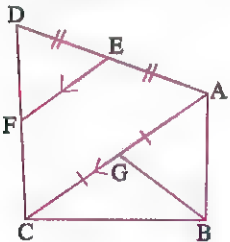
$m(\angle ABC) = 90^\circ$ ،

G منتصف $\overline{AC}$ ، GB = DG

أثبت أن:

$m(\angle ADC) = 90^\circ$

15 في الشكل المقابل:



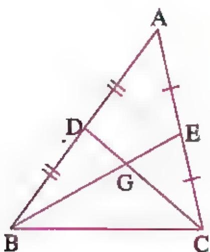
ABCD شكل رباعي: E ، G منتصفا $\overline{AD}$ ، $\overline{AC}$ على الترتيب،

$\overline{FE} \parallel \overline{AC}$ ، FE = GB ،

أثبت أن: $m(\angle ABC) = 90^\circ$



16 في الشكل المقابل:



إذا كان BE = 15سم ، CD = 9سم ،

أوجد: الفترة التي ينتمي إليها طول $\overline{BC}$.

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة.

(أ) 2 : 1 (ب) 1 : 2 (جـ) 3 : 1 (د) 1 : 3

2 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة 2 : .... من جهة الرأس.

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

3 إذا كان $\overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC ، G نقطة تقاطع متوسطاته فإن: AG = ... AD

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

4 إذا كان $\overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC ، G نقطة تقاطع متوسطاته وكان طول $\overline{AG}$ = 6 سم،

فإن طول $\overline{GD}$ = ... سم.

(أ) 3 (ب) 9 (جـ) 6 (د) 12

5 فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B ، إذا كان طول $\overline{AB}$ = 6 سم، طول $\overline{BC}$ = 8 سم،

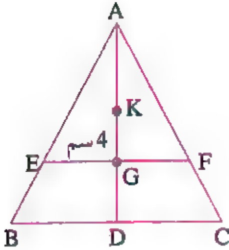
فإن طول المتوسط الخارج من الرأس B يساوى .... سم.

(أ) 7 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 5

6 المثلث XYZ قائم الزاوية فى X ، وكان طول المتوسط الخارج من X يساوى 5 سم ، فإن طول $\overline{YZ}$ = ... سم.

(أ) 15 (ب) 10 (جـ) 5 (د) 4

7 فى الشكل المقابل:



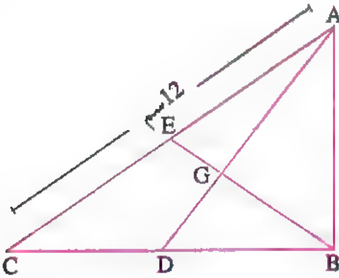
إذا كانت G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، K نقطة تلاقى متوسطات المثلث AEF فما طول $\overline{GD}$ ؟

(أ) 2 سم (ب) 4 سم

(جـ) 6 سم (د) 8 سم

2 أجب عما يأتى:

1 فى الشكل المقابل:

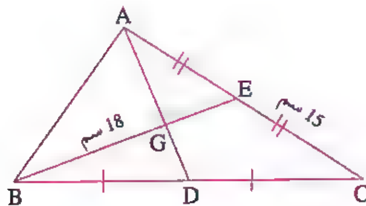


ABC مثلث قائم الزاوية فى B ، $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ متوسطان متقاطعان فى G ،

وطول $\overline{AC}$ = 12 سم.

أوجد: طول $\overline{BG}$, $\overline{EG}$

2 فى الشكل المقابل:



إذا كانت E منتصف $\overline{AC}$ ، D منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ ،

CE = 15 سم ، BG = 18 سم

أوجد: بالبرهان طول $\overline{AD}$

ذاكر — الدرس 5

المثلث المتساوى الساقين (الجزء 1)

(Isosceles Triangle)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب خواص المثلث المتساوى الساقين.
- يتعرف الطالب خواص المثلث المتساوى الأضلاع.
- يستخدم الطالب خواص المثلث المتساوى الساقين والمثلث المتساوى الأضلاع فى حل مشكلات حياتية.

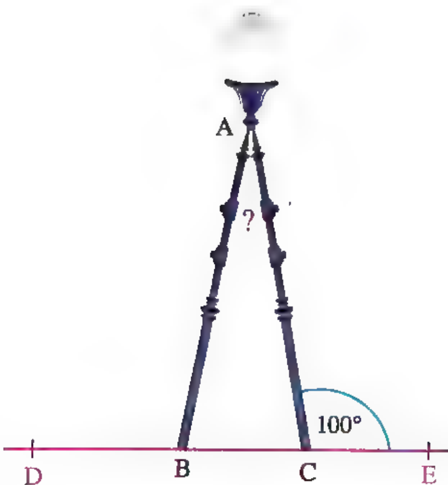
مفردات أساسية

- مثلث متساوى الساقين (Isosceles Triangle)
- مثلث متساوى الأضلاع (Equilateral Triangle)
- الساق (Leg)
- القاعدة (Base)

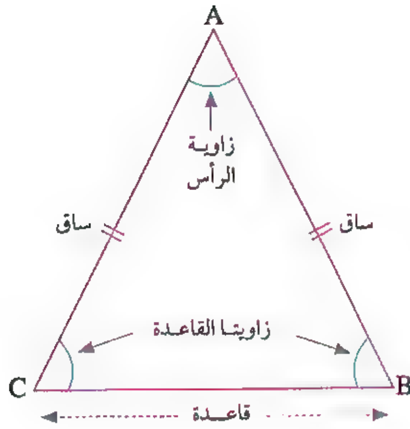


فكر وناقش

- فى حديقة عامة، تم تثبيت عمود إنارة على شكل مثلث متساوى الساقين كما هو موضح بالشكل الذى أمامك. إذا كان أحد أضلاع عمود الإنارة يلتقى بالأرض بزاوية قياسها $100°$ $(\blacktriangleright m \angle ACE) = 100°)$ فما قياس الزاوية عند قمته؟ $m(\angle CAB)$
- فى هذا الدرس، سوف تتعرف على المثلث المتساوى الساقين والمثلث المتساوى الأضلاع، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



تعلم 1 المثلث المتساوى الساقين:



المثلث المتساوى الساقين: هو مثلث يحتوى على ضلعين متطابقين.

فى الشكل المقابل: ABC مثلث متساوى الساقين:

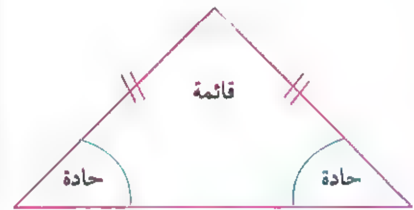
- يُسمى الضلعان المتطابقان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ **ساقى المثلث**
- ويُسمى الضلع الثالث $\overline{BC}$ **قاعدة**
- تُسمى الزاوية المحصورة بين الساقين $\angle A$ **زاوية الرأس**
- تُسمى الزاويتان الأخريان $\angle B \ , \angle C$ **زاويتى القاعدة**

نقاط هامة

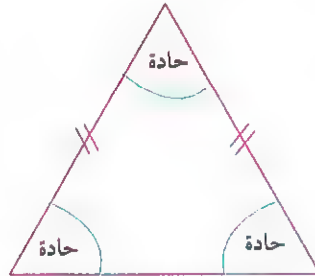
- زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين دائمًا حادتان.
- زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يمكن أن تكون قائمة أو حادة أو منفرجة.

أى أن: المثلث المتساوى الساقين يمكن أن يكون:

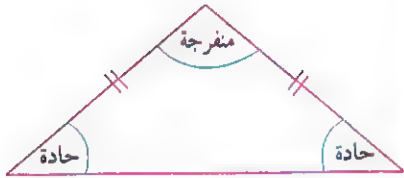
1 قائم الزاوية



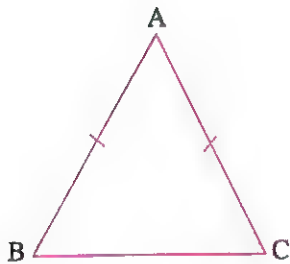
2 حاد الزوايا



3 منفرج الزاوية



نظرية المثلث المتساوى الساقين



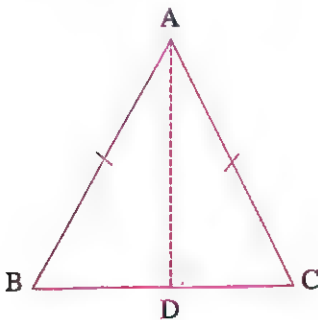
زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.

فى المثلث ABC :

إذا كانت : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

فإن : $\angle B \cong \angle C$

لإثبات صحة نظرية (1 – 5):

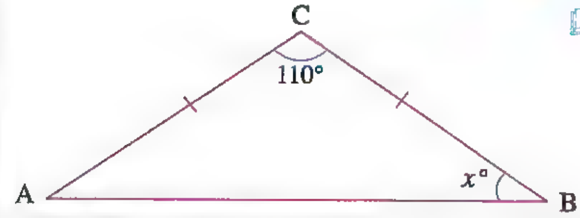


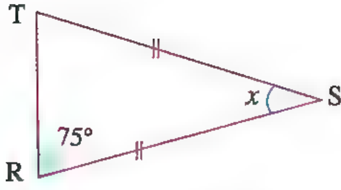
1 نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

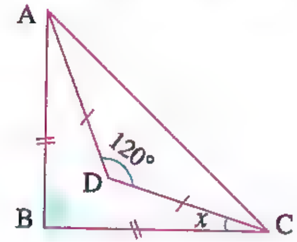
2 نستخدم الحالة الخامسة (RHS) لإثبات تطابق المثلثين ABD ، ACD

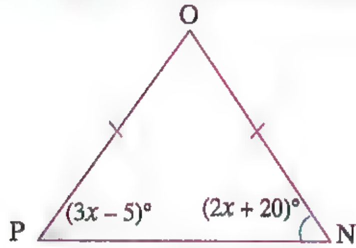
ونستنتج من التطابق: $\angle B \cong \angle C$

مثـال 1 في كل شكل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x :

1


2


3


4


الحـل

1 في المثلث ABC

$\because \overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\therefore \angle A \cong \angle B$

$\because m(\angle C) = 110°$

$\therefore m(\angle A) = m(\angle B) = \frac{180° - 110°}{2} = 35°$

$\therefore x = 35°$

2 في المثلث RTS

$\because \overline{ST} \cong \overline{SR}$

$\therefore m(\angle R) = m(\angle T) = 75°$

$\because m(\angle S) = 180° - (75° + 75°) = 30°$

$\therefore x = 30°$

3 في المثلث ABC

$\because \overline{BC} \cong \overline{BA}$ $\quad\therefore \angle BCA \cong \angle BAC$

$\because m(\angle BCA) = m(\angle BAC) = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$

في المثلث DCA

$\because \overline{DC} \cong \overline{DA}$ $\quad\therefore \angle DCA \cong \angle DAC$

$\therefore m(\angle DCA) = m(\angle DAC) = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$

$\therefore m(\angle BCD) = 45° - 30° = 15°$

$\therefore x = 15°$

4 في المثلث PNO

$\because \overline{OP} \cong \overline{ON}$

$\therefore \angle P \cong \angle N$

$\therefore 3x - 5 = 2x + 20$

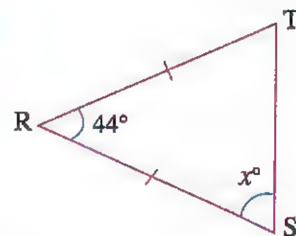
$\therefore 3x - 2x = 20 + 5 = 25$

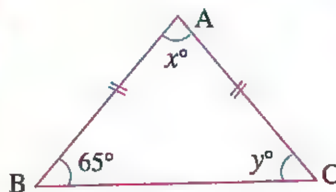
$\because x = 25$

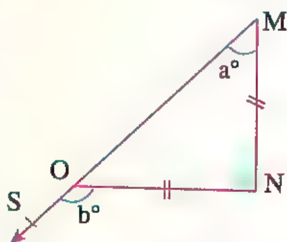


سؤال 1

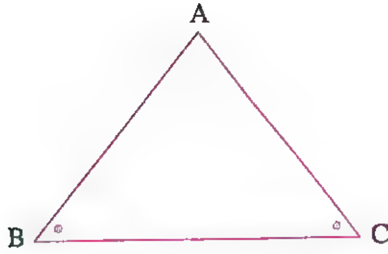
في كل شكل من الأشكال الآتيـة أوجد قيمة الرمز المجهول:







عكس نظرية (1) عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين



إذا تطابقت زاويتان فى مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.

فى المثلث ABC :

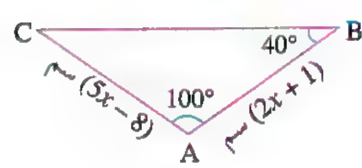
إذا كانت: $\angle C \cong \angle B$

فإن : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مثال 1

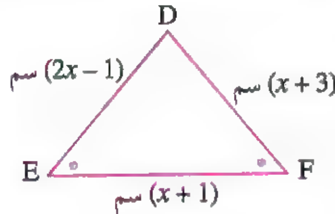
مستخدمًا المعطيات فى كل شكل من الأشكال الآتية أجب عما يأتى:

1



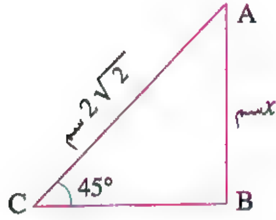
أوجد قيمة x

2



أوجد محيط المثلث DEF

3



أوجد قيمة x

الحـل

1

$\because m(\angle A) = 100^\circ \quad , \quad m(\angle B) = 40^\circ$

$\therefore m(\angle C) = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$

$\because \angle B \cong \angle C \qquad \therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\therefore 5x - 8 = 2x + 1$

$\therefore 5x - 2x = 1 + 8 = 9$

$\therefore 3x = 9 \qquad \therefore x = \frac{9}{3} = 3$

2

$\because m(\angle F) = m(\angle E)$

$\therefore \overline{DE} \cong \overline{DF}$

$\therefore 2x - 1 = x + 3$

$\therefore 2x - x = 3 + 1 = 4 \qquad \therefore x = 4$

$\therefore DE = DF = 2(4) - 1 = 7$

$EF = (4) + 1 = 5$

$\therefore$ محيط المثلث DEF = 19 سم

(لأن: $7 + 7 + 5 = 19$)

3

$\because m(\angle B) = 90^\circ \quad , \quad m(\angle C) = 45^\circ$

$\therefore m(\angle A) = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$

$\because m(\angle C) = m(\angle A)$

$\therefore \overline{BA} \cong \overline{BC}$

$\because (BA)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ (نظرية فيثاغورس)

$\therefore x^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2$

$\therefore 2x^2 = 4 \times 2 = 8$

$\therefore x^2 = \frac{8}{2} = 4$

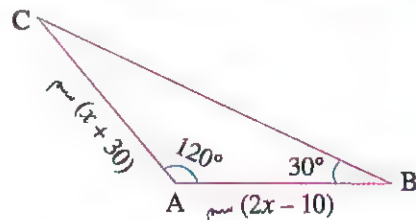
$\therefore x = \sqrt{4} = 2$ (حيث $x \geqslant 0$)

$\therefore$ قيمة x تساوى 2

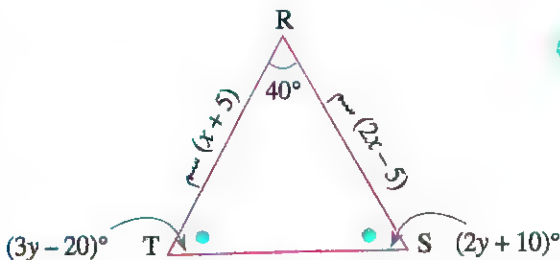
س سؤال 2

فى كل شكل من الأشكال الآتيـة أوجد قيمة الرمز المجهول:

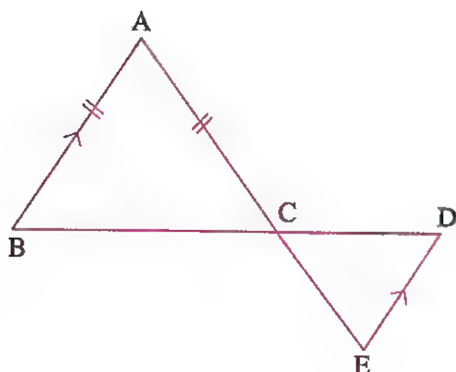
1



2



مثـال 3 في الشكـل المقابـل:



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ، $\overline{BD} \cap \overline{AE} = \{C\}$ ، $AC = AB$

برهن أن المثلث CDE متساوى الساقين

الحـل

في المثلـث ABC

1 $\because AC = AB \quad \therefore m(\angle B) = m(\angle ACB)$

$\because \overline{BD} \cap \overline{AE} = \{C\}$ ،

2 $\therefore m(\angle ACB) = m(\angle ECD)$ (بالتقابل بالرأس)

3 $\therefore m(\angle ECD) = m(\angle B)$ من ①، ②

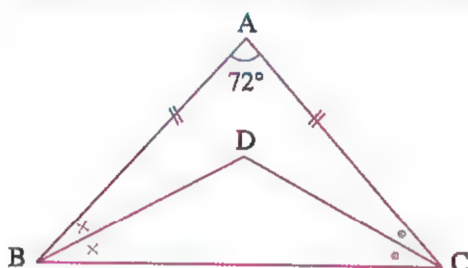
4 $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \quad \therefore m(\angle B) = m(\angle D)$ (بالتبادل)

$\therefore m(\angle ECD) = m(\angle D)$ ، من ③، ④

$\therefore \overline{ED} \cong \overline{EC}$

∴ المثلث CDE متساوى الساقين

مثـال 4 في الشكـل المقابـل:



$AB = AC$ ، $m(\angle A) = 72°$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ ، $\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

أثبت أن المثلث DBC متساوى الساقين

الحـل

في المثلـث ABC

$\because AB = AC$

$\therefore m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = \dfrac{180° - 72°}{2} = 54°$

$\because \overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

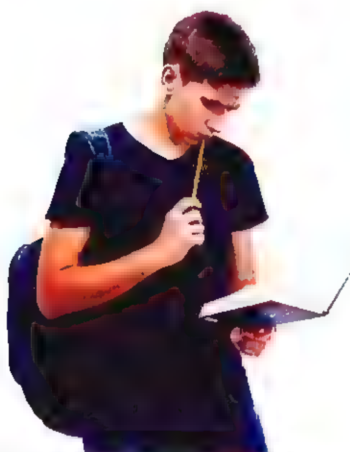
$\therefore m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = \dfrac{54°}{2} = 27°$

$\because \overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

$\therefore m(\angle ACD) = m(\angle DCB) = \dfrac{54°}{2} = 27°$

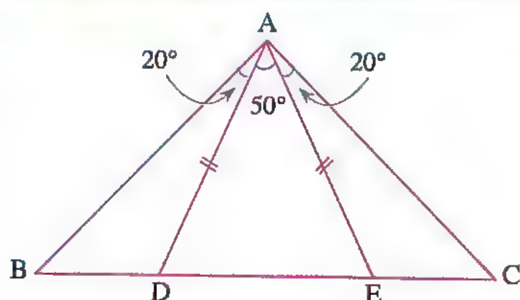
$\therefore m(\angle DBC) = m(\angle DCB) = 27° \quad \therefore \overline{DC} \cong \overline{DB}$

∴ المثلث DBC متساوى الساقين



س؟ سؤال 3

في الشكـل المقابـل:

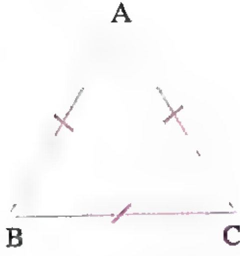


$E \in \overline{BC}$ ، $D \in \overline{BC}$

أثبت أن المثلث ABC متساوى الساقين

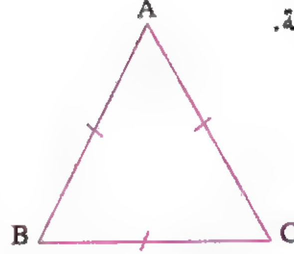
تعلم 2 المثلث المتساوى الأضلاع:

المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.



نتيجة (1)

المثلث المتساوى الأضلاع زواياه الثلاث متطابقة.



فى المثلث ABC

إذا كان: $AB = AC = BC$

فإن: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

ويكون: $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

أى أن: قياس كل زاوية داخلة فى المثلث المتساوى الأضلاع تساوى 60°

لإثبات صحة نتيجة (1):

$\because AB = AC$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle C)$ —— 1

$\because BA = BC$

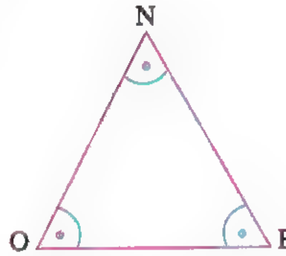
$\therefore m(\angle A) = m(\angle C)$ —— 2

من 1 ، 2 نستنتج أن:

$\therefore m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C)$

نتيجة (2)

المثلث الذى زواياه الثلاث متطابقة أضلاعه متساوية فى الطول



فى المثلث NOP

إذا كانت: $\angle N \cong \angle O \cong \angle P$

فإن: $NO = OP = PN$

لإثبات صحة نتيجة (2):

$\because m(\angle O) = m(\angle P)$

$\therefore NO = NP$ —— 1

$\because m(\angle O) = m(\angle N)$

$\therefore PN = PO$ —— 2

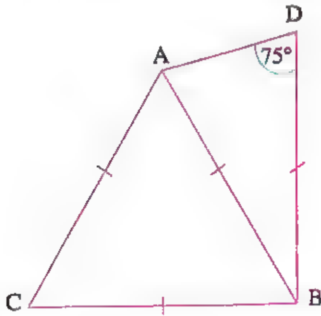
من 1 ، 2 نستنتج أن:

$\therefore NO = OP = PN$

مثال 5 فى الشكل المقابل:

$AB = BC = AC = BD$ ، $m(\angle D) = 75^\circ$

أوجد بالبرهان كلًّا من: $m(\angle DBC)$ ، $m(\angle DAC)$



الحل

فى المثلث ABC

$\because AB = BC = AC$

$\therefore m(\angle CAB) = m(\angle C) = m(\angle ABC) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

فى المثلث ABD

$\because BD = BA$ $\therefore m(\angle BDA) = m(\angle BAD) = 75^\circ$

$\therefore m(\angle DBA) = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$

$\therefore m(\angle DBC) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

$\therefore m(\angle DAC) = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ$

مثـال 6 📖 فى الشكل المقابل:

$BC = CD = AC$

، $m(\angle DCB) = 90°$ ، $m(\angle CAD) = 75°$ ،

أوجد مع البرهان قيمة x

الحـل

فى المثلـث ADC

$\because\ AC = CD$

$\therefore\ m(\angle CDA) = m(\angle CAD) = 75°$

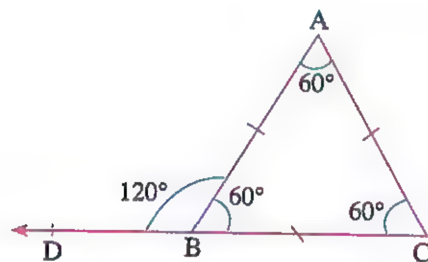
فى المثلـث DCB

$\because\ CB = CD$

$\therefore\ m(\angle CDB) = m(\angle CBD) = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$

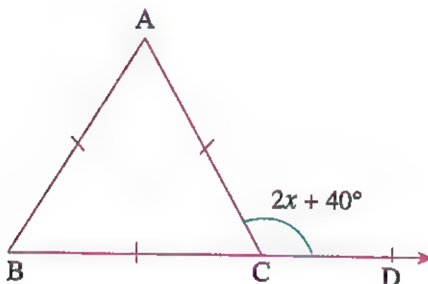
$\therefore\ x = 75° - 45° = 30°$

نقاط هامة



- قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس المثلث المتساوى الأضلاع تساوى 120°

مثـال 7 فى الشكل المقابل:



المثلث ABC متساوى الأضلاع

أوجد بالبرهان قيمة x

الحـل

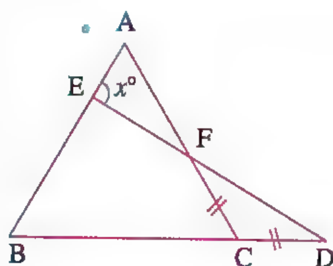
$\because$ المثلث ABC متساوى الأضلاع ، $\angle ACD$ خارجة عن المثلث ABC

$\therefore\ m(\angle ACD) = 120°$

$\therefore\ 2x + 40° = 120°$ $\therefore\ 2x = 120° - 40° = 80°$

$\therefore\ x = \frac{80°}{2} = 40°$

سؤال 4



📖 فى الشكـل المقابـل:

ABC مثلث متساوى الأضلاع ، $CF = CD$ ،

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$

أوجـد قيمـة x

▶ أسئلة الكتاب المدرسى

المثلث المتساوى الساقين (نظرية وعكسها)

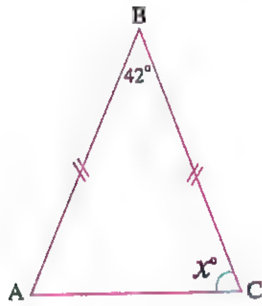
1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) متتامتان (ب) متكاملتان (جـ) متطابقتان (د) متجاورتان

2 مثلث متساوى الساقين قياس إحدى زاويتى القاعدة $50°$ فإن قياس زاوية الرأس = ...

(أ) $40°$ (ب) $50°$ (جـ) $80°$ (د) $65°$



3 فى الشكل المقابل: ما قيمة x ؟ ....

(أ) 42 (ب) 12
(جـ) 69 (د) 84

4 إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية فى A ، $AB = AC$ فإن : $m(\angle B) =$ ....°

(أ) 30 (ب) 45 (جـ) 60 (د) 90

5 إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين $30°$ كان المثلث ....

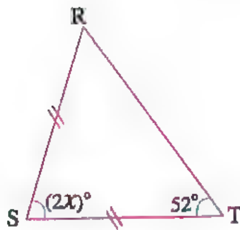
(أ) منفرج الزاوية (ب) حاد الزوايا (جـ) قائم الزاوية (د) متساوى الأضلاع

6 إذا كان ABC مثلثًا وكان $BA = BC$ ، $m(\angle A) = 37°$ فإن: $m(\angle B) =$ ....°

(أ) 37 (ب) 106 (جـ) 74 (د) 90

7 مثلث ABC فيه: $AC = BC$ ، إذا كان: $m(\angle C) = 110°$ ، فإن: $m(\angle A) =$ ....°

(أ) 70 (ب) 35 (جـ) 45 (د) 110



8 فى الشكل المقابل: ما قيمة x ؟ ....

(أ) 26 (ب) 52
(جـ) 76 (د) 38

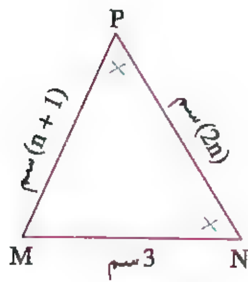
9 مثلث ABC فيه: $m(\angle A) = m(\angle C)$ ، فإن: ....

(أ) $AC = AB$ (ب) $BA = BC$ (جـ) $CA = CB$ (د) غير ذلك

10 في الشكل المقابل: ما طول $\overline{PN}$ ؟ ....

(أ) 8 سم　　(ب) 3 سم

(جـ) 6 سم　　(د) 4 سم

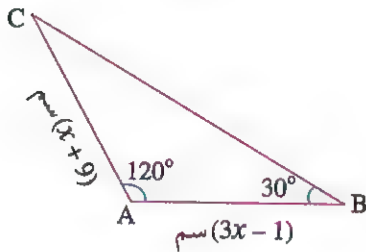


11 في الشكل المقابل:

ما قيمة x ؟ ....

(أ) 10　　(ب) 5

(جـ) 2　　(د) 3

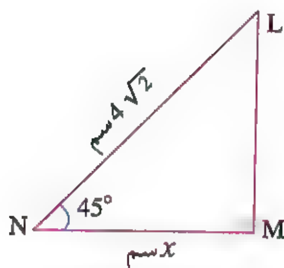


12 في الشكل المقابل:

ما قيمة x ؟ ....

(أ) $4\sqrt{2}$　　(ب) $5\sqrt{2}$

(جـ) 5　　(د) 4

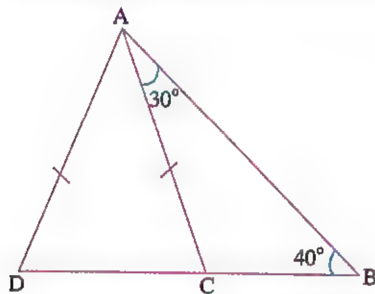


2 في الشكل المقابل:

$AC = AD$ ، $m(\angle BAC) = 30°$

، $m(\angle B) = 40°$

أوجد: $m(\angle CAD)$



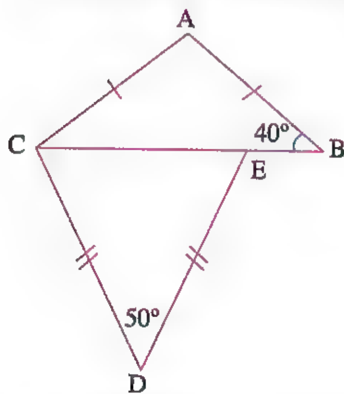
3 في الشكل المقابل:

$AB = AC$ ، $m(\angle B) = 40°$

، $m(\angle D) = 50°$ ، $DC = DE$

أوجد: 1 $m(\angle A)$

2 $m(\angle ACD)$

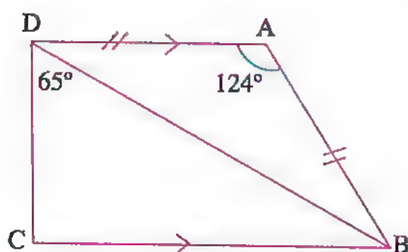


4 في الشكل المقابل:

، $m(\angle BDC) = 65°$ ، $m(\angle A) = 124°$

$\overline{AD} \parallel \overline{CB}$ ، $AB = AD$

أوجد: $m(\angle C)$

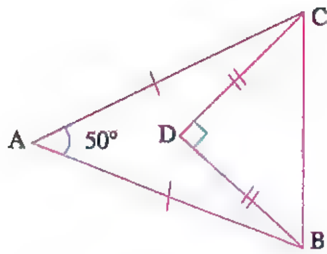


5 في الشكل المقابل:

$m(\angle D) = 90^\circ$ ، $m(\angle A) = 50^\circ$ ،

$DB = DC$ ، $AB = AC$

أوجد: $m(\angle ABD)$

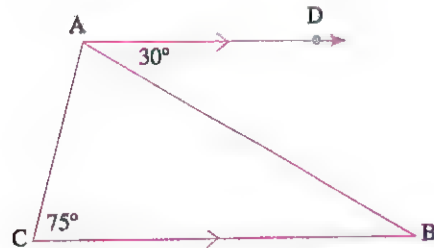


6 في الشكل المقابل:

$m(\angle C) = 75^\circ$ ، $m(\angle BAD) = 30^\circ$ ،

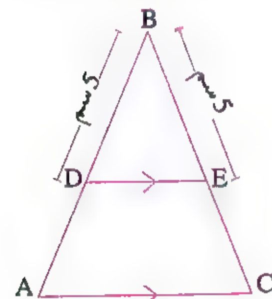
$\overline{CB} \parallel \overrightarrow{AD}$

أثبت أن: مثلث ABC متساوى الساقين.



7 في الشكل المقابل:

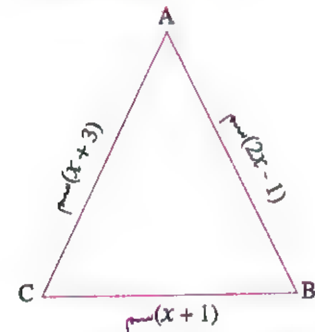
أثبت أن: مثلث ABC متساوى الساقين.



8 في الشكل المقابل:

مثلث ABC فيه: $m(\angle B) = m(\angle C)$

أوجد: محيط المثلث ABC

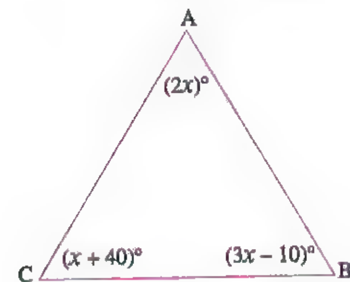


9 في الشكل المقابل: مثلث ABC فيه:

$m(\angle B) = (3x - 10)^\circ$ ، $m(\angle A) = (2x)^\circ$ ،

، $m(\angle C) = (x + 40)^\circ$

أثبت أن: مثلث ABC متساوى الساقين.



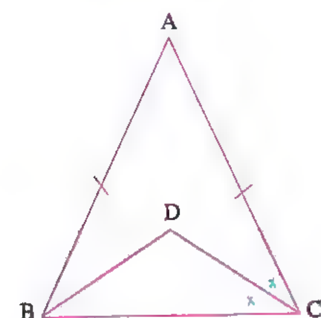
10 في الشكل المقابل:

$AB = AC$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

أثبت أن: مثلث DBC متساوى الساقين.



11 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان قياس زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يساوى $60°$ فإن المثلث يكون ....

(أ) منفرج الزاوية (ب) متساوى الأضلاع (جـ) قائم الزاوية (د) مختلف الأضلاع

2 مثلث ABC فيه: $AB = AC$ ، $m(\angle B) = 60°$ ، فإذا كان محيطه = 12 سم، فإن BC = ... سم.

(أ) 12 (ب) 4 (جـ) 3 (د) 36

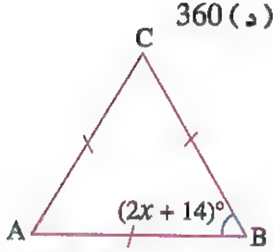
3 قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس المثلث المتساوى الأضلاع = ...°

(أ) 60 (ب) 120 (جـ) 180 (د) 360

4 فى الشكل المقابل: ما قيمة x ؟

(أ) 46 (ب) 23

(جـ) 60 (د) 37

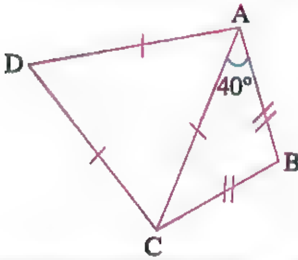


12 فى الشكل المقابل:

$AB = BC$ ، $AD = DC = AC$

$m(\angle BAC) = 40°$

أوجد: $m(\angle BCD)$

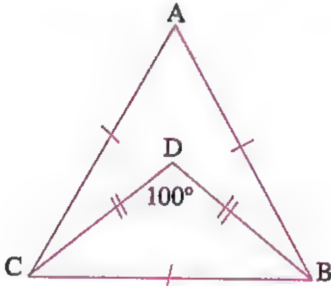


13 فى الشكل المقابل:

مثلث ABC متساوى الأضلاع، $DB = DC$

$m(\angle D) = 100°$

أوجد: $m(\angle ABD)$

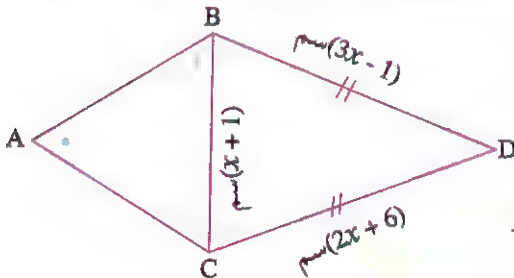


14 فى الشكل المقابل:

مثلث ABC زواياه متطابقة، $DB = DC$

أوجد: 1 محيط المثلث ABC

2 محيط المثلث BDC 3 محيط الشكل ABDC



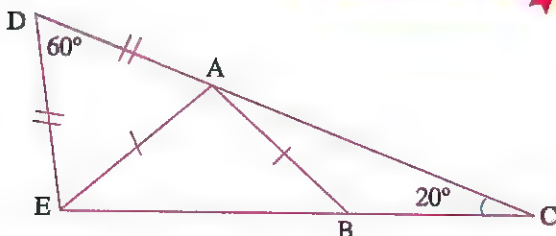


15 فى الشكل المقابل:

$DA = DE$ ، $m(\angle D) = 60°$

$AB = AE$ ، $m(\angle C) = 20°$

أثبت أن: المثلث ABC متساوى الساقين.



اختبر نفسك

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان ABC مثلثًا فيه $AB = BC$ ، $m(\angle C) = 55°$ فإن: $m(\angle B) =$ ....

(أ) $55°$ (ب) $70°$ (جـ) $35°$ (د) $90°$

2 فى الشكل المقابل:

ما قيمة x ؟ ....

(أ) 40 (ب) 70

(جـ) 35 (د) 110

3 قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس مثلث متساوى الأضلاع = ...

(أ) $180°$ (ب) $60°$ (جـ) $90°$ (د) $120°$

4 كل زاوية من زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين يجب أن تكون ....

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

5 مثلث ABC فيه: $m(\angle B) = m(\angle C)$ فإن: $AB =$ ....

(أ) CB (ب) CA (جـ) $\overline{AC}$ (د) غير ذلك

6 مثلث ABC فيه: $m(\angle A) = m(\angle B)$ ، $m(\angle A) = \frac{1}{2} m(\angle C)$ فإن مثلث ABC يكون ....

(أ) منفرج الزاوية ومتساوى الساقين (ب) منفرج الزاوية

(جـ) حاد الزوايا ومتساوى الساقين (د) قائم الزاوية ومتساوى الساقين

7 فى الشكل المقابل: ما قيمة x ؟ ....

(أ) 11 (ب) 22

(جـ) 33 (د) 44

8 فى الشكل المقابل: ما قيمة n ؟ ....

(أ) 40 (ب) 70

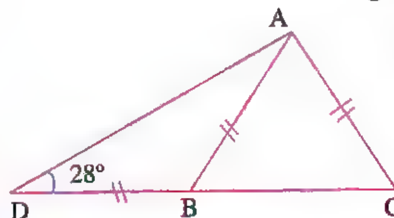
(جـ) 14 (د) 42

2 أجب عما يأتى:

1 فى الشكل المقابل:

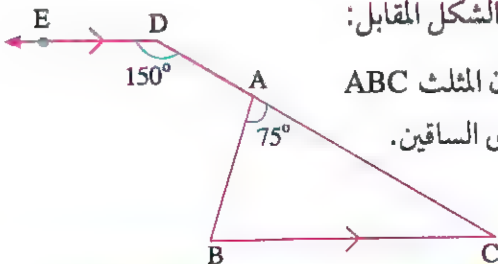
أوجد مع البرهان:

$m(\angle CAD)$



2 فى الشكل المقابل:

أثبت أن المثلث ABC متساوى الساقين.



ذاكر

الدرس 5

المثلث المتساوى الساقين الجزء 2
(Isosceles Triangle)



نواتج التعلم

- يعرف الطالب التماثل فى المثلث.
- يعرف الطالب العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث الثلاثينى الستينى.
- يستخدم الطالب خواص المثلث المتساوى الساقين والمثلث المتساوى الأضلاع فى حل مشكلات حياتية.



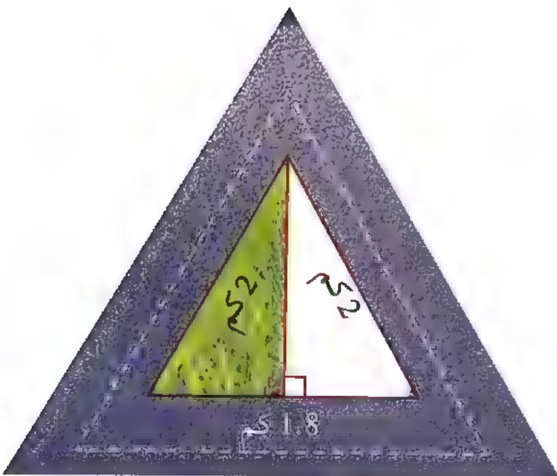
مفردات أساسية

- محور التماثل (Axis of Symmetry)

فكر وناقش

- ميدان به حديقة مثلثة الشكل أطوال أضلاعه كما هو موضح بالشكل الذى أمامك، يوجد حولها مسار ضيق.
هل يمكنك حساب نصف طول هذا المسار؟

- فى هذا الدرس، سوف نتعرف على محاور تماثل القطعة المستقيمة والمثلث المتساوى الساقين والمثلث المتساوى الأضلاع، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

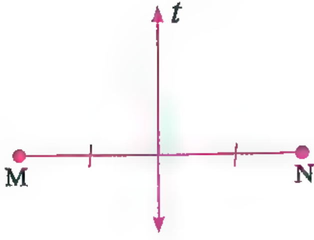


تعلم 1 محور تماثل القطعة المستقيمة

محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من نقطة منتصفها.

إذا كان : المستقيم $t \perp \overline{MN}$ ، المستقيم t ينصف $\overline{MN}$

فـإن : المستقيم t محور تماثل $\overline{MN}$



نتائج محور تماثل القطعة المستقيمة

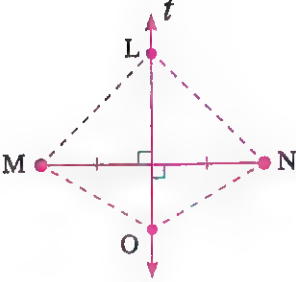
1 النقطة التى تنتمى إلى محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيهما.

إذا كان : المستقيم t محور تماثل $\overline{MN}$

$L \in t$, $O \in t$

فـإن : $ML = NL$

$MO = NO$

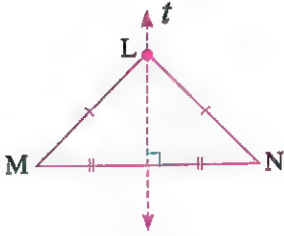


2 النقطة التى على بُعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة تقع على محور تماثل هذه القطعة المستقيمة.

إذا كان : المستقيم t محور تماثل $\overline{MN}$

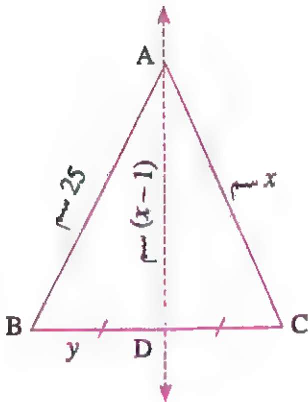
، $ML = NL$

فـإن : $L \in t$



مثال 1 فى الشكل المقابل:

أوجد بالبرهان قيمة كل من x ، y



الحل

$\because BD = DC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD}$ محور تماثل $\overline{BC}$

$\because A \in \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore AB = AC$ $\qquad \therefore x = 25$

ومنها: $AD = 24$ سم $\qquad$ (لأن: $x - 1 = 25 - 1 = 24$)

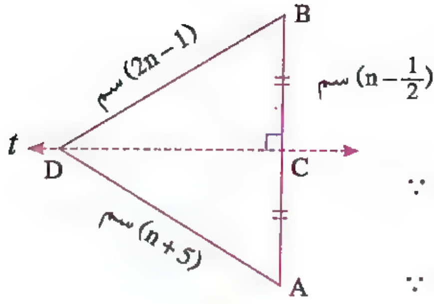
فى المثلث ADB

$\because m(\angle ADB) = 90^\circ$ $\quad \therefore (AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2$ (نظرية فيثاغورث)

$\therefore (25)^2 = (24)^2 + y^2$

$\therefore y^2 = (25)^2 - (24)^2 = 625 - 576 = 49$ $\qquad \therefore y = \sqrt{49} = 7$ $\qquad$ (حيث $y > 0$)

مثال 2 في الشكل المقابل:



أوجد $m(\angle A)$

الحل

$\because CB = CA \;,\; \overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC}$ محور تماثل $\overline{AB}$

$\because D \in \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore DB = DA$

$\therefore 2n - 1 = n + 5$ $\qquad \therefore 2n - n = 5 + 1 = 6$ $\qquad \therefore n = 6$

$\therefore BD = 2 \times 6 - 1 = 12 - 1 = 11$ $\qquad \therefore DB = DA = 11$

$\because CB = n - \frac{1}{2}$ $\qquad \therefore CB = 6 - \frac{1}{2} = 5.5$

$\because CB = CA$ $\qquad \therefore AB = 2 \times 5.5 = 11$

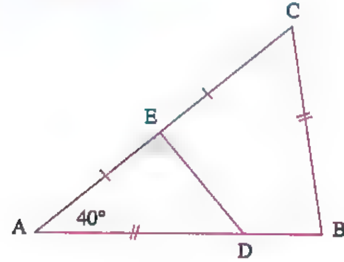
$\therefore DB = DA = AB = 11$

$\therefore$ المثلث DAB متساوي الأضلاع

$\therefore m(\angle A) = 60°$



مثال 3 في الشكل المقابل:



$m(\angle A) = 40°$ ، $AE = EC \;,\; AD = CB$

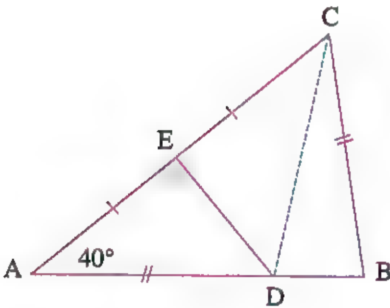
أوجد $m(\angle C)$

الحل

العمـــل: نرسم $\overline{DC}$

البرهـــان: $\because EA = EC \;,\; \overleftrightarrow{DE} \perp \overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DE}$ محور تماثل $\overline{AC}$



$\because D \in \overleftrightarrow{DE}$ $\qquad \therefore AD = CD$

$\because m(\angle A) = 40°$ $\qquad \therefore m(\angle DCA) = 40°$

في المثلث CDA

$m(\angle CDA) = 180° - (40° + 40°) = 100°$

$\because \angle ADB$ مستقيمة ،

$\therefore m(\angle CDB) = 180° - 100° = 80°$

$\because AD = CB \;,\; AD = CD$ $\qquad \therefore CB = CD$

$\therefore m(\angle DCB) = 180° - (80° + 80°) = 20°$

$\therefore m(\angle CDB) = m(\angle B) = 80°$

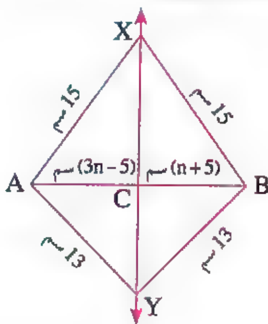
$\therefore m(\angle C) = 40° + 20° = 60°$

س؟ سؤال 1

في الشكل المقابل:

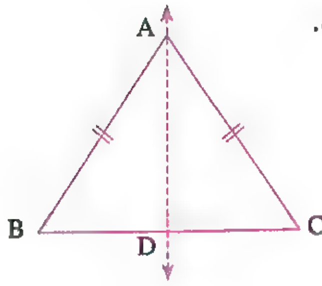
إذا كانت: $C \in \overline{XY}$

فأوجد قيمة n



تعلم 2 محور تماثل المثلث المتساوى الساقين:

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو مستقيم يمر برأس المثلث وعمودى على قاعدته.



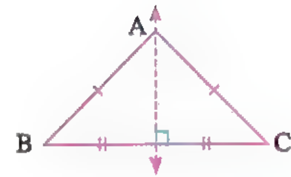
فى الشكل المقابل:

إذا كان : $AB = AC$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

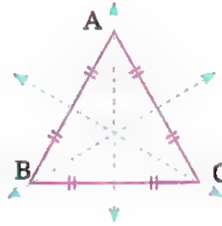
فإن : $\overleftrightarrow{AD}$ محور تماثل المثلث ABC

نقاط هامة

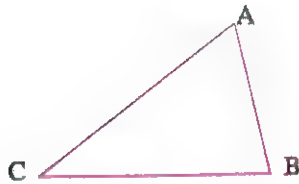
- المثلث المتساوى الساقين
  له محور تماثل واحد.



- المثلث المتساوى الأضلاع
  له ثلاثة محاور تماثل.



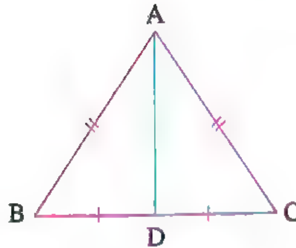
- المثلث المختلف الأضلاع
  ليس له محاور تماثل.



نتائج محور تماثل المثلث المتساوى الساقين:

نتيجة (1)

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.



فى الشكل المقابل:

إذا كان : $\overline{AD}$ متوسط ، $AB = AC$

فإن : 1 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

2 $m(\angle BAD) = m(\angle CAD)$

مثال 4 فى الشكل المقابل:

$\overline{AD}$ متوسط , $m(\angle ABF) = m(\angle ACE)$

أثبت أن: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

الحل

$\because m(\angle ABC) + m(\angle ABF) = 180°$ ، $m(\angle ACB) + m(\angle ACE) = 180°$

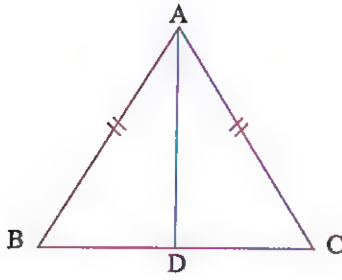
$\because m(\angle ACE) = m(\angle ABF)$ $\therefore m(\angle ACB) = m(\angle ABC)$

$\therefore$ المثلث ABC متساوى الساقين

، $\because \overline{AD}$ متوسط $\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$ (وهو المطلوب)

نتيجة (2)

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.



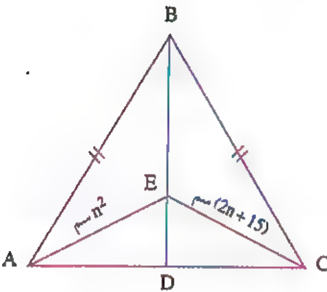
فى الشكل المقابل:

إذا كان : $AB = AC$ ، $\overrightarrow{AD}$ ينصف $\angle BAC$

فإن : 1 $BD = DC$

2 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

مثال 5 فى الشكل المقابل:



$E \in \overline{BD}$ ، أوجد قيمة n

الحل

فى المثلث ABC $\because BA = BC$

، $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\therefore \overline{BD} \perp \overline{AC}$, $AD = DC$

$\therefore \overleftrightarrow{BD}$ محور تماثل $\overline{AC}$

$\because E \in \overline{BD}$ $\therefore EA = EC$

$\therefore n^2 = 2n + 15$

$\therefore n^2 - 2n - 15 = 0$ (تحليل ثلاثية الحدود)

$(n+3)(n-5) = 0$

إما: $n + 3 = 0$ ومنها ← $n = -3$ $(-3 > -7.5)$

أو $n - 5 = 0$ ومنها ← $n = 5$ $(5 > -7.5)$

$\therefore$ قيم n هى $-3 , 5$

لاحظ أن

$2n + 15 > 0$

$n > \frac{-15}{2}$

$n > -7.5$



سؤال 2

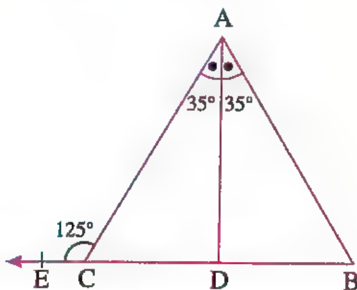
فى الشكل المقابل:

$m(\angle BAD) = m(\angle CAD) = 35°$

$m(\angle ACE) = 125°$

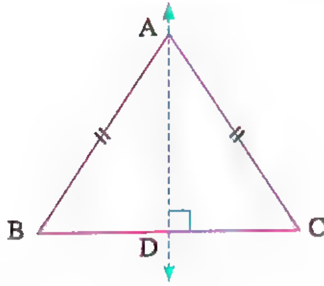
أثبت أن: 1 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

2 $\overline{AD}$ متوسط



نتيجـة (3)

المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلًا من القاعدة وزاوية الرأس.



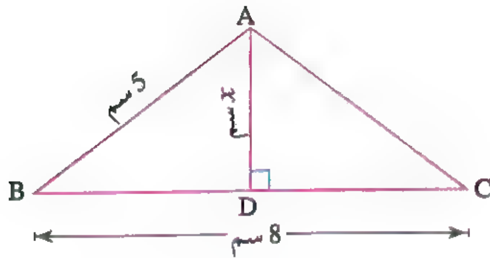
فى الشكل المقابـل:

إذا كان : $AB = AC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$

فـإن : 1 $BD = DC$

2 $m(\angle BAD) = m(\angle CAD)$

مثـال فى الشكـل المقابـل:



$\angle B \cong \angle C$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$BC = 8$ سم، $AB = 5$ سم

أوجـد بالبـرهان قيمـة x

الحـل

$\because \angle B \cong \angle C$ $\quad$ $\therefore AB = AC = 5$

$\therefore$ المثلث ABC متساوى الساقين

$\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore BD = DC$ ، $\because BC = 8$

$\therefore$ طول $\overline{BD}$ = طول $\overline{DC} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ سم

- فى المثلث ADC

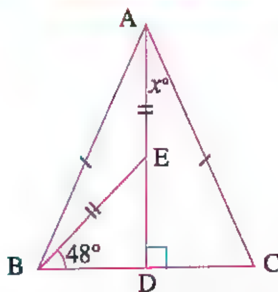
$\because (AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$ (نظـرية فيثاغـورث)

$\therefore (5)^2 = x^2 + (4)^2$ $\quad$ $\therefore x^2 = (5)^2 - (4)^2 = 9$

$\therefore x = \sqrt{9} = 3$ حيث $x > 0$



سؤال 3



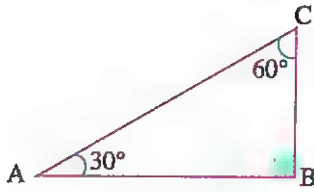
فى الشكـل المقابـل:

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $EA = EB$, $AB = AC$

$m(\angle EBD) = 48°$

أوجـد قيمـة x

تعلم 3 المثلث الثلاثينى الستينى:



- المثلث الثلاثينى الستينى هو مثلث قائم الزاوية.
- زاويتاه الحادتان قياساهما 30° ، 60°

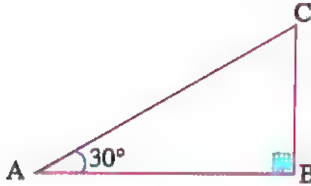
نتيجة

فى المثلث الثلاثينى الستينى طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها 30° يساوى نصف طول الوتر.

فى الشكل المقابل:

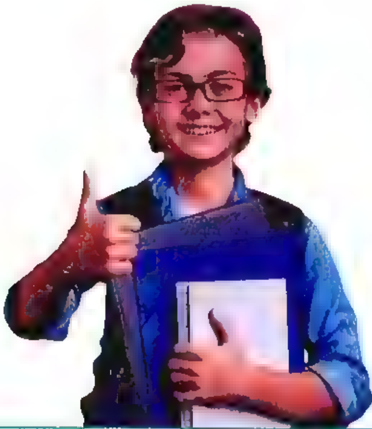
إذا كان : ΔABC قائم الزاوية فى B ، $m(\angle A) = 30°$

فإن : $BC = \frac{1}{2}AC$



مثال 7 فى الشكل المقابل:

ABC مثلث قائم الزاوية فى B ،
$\overline{BD}$ متوسط فى المثلث ABC ، $m(\angle C) = 30°$
برهن أن المثلث ABD متساوى الأضلاع.



الحل

فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B ، $\because m(\angle C) = 30°$

$\therefore BA = \frac{1}{2}AC \longrightarrow$ ①

$\because \overline{BD}$ متوسط مرسوم من رأس القائمة B

$\therefore BD = AD = \frac{1}{2}AC \longrightarrow$ ②

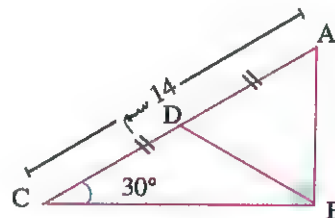
من ① ، ② $\therefore BD = AD = AB$

$\therefore$ المثلث ABD متساوى الأضلاع.

س؟ سؤال 4

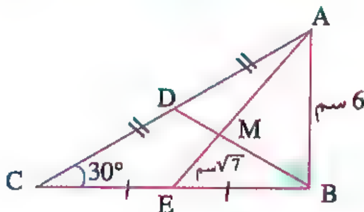
مستعينًا بمعطيات كل شكل أوجد المطلوب أسفل كل شكل:

1



- AB = ... سم
- AD = ... سم
- محيط المثلث ABD = ... سم

2

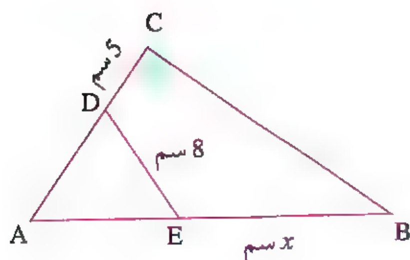


- AC = ... سم
- BD = ... سم
- AM = ... سم
- DM = ... سم

مثـال في الشكـل المقابـل:

المثلث ADE متساوى الأضلاع

أوجد قيمة: x



الحـل

∵ المثلث ADE متساوى الأضلاع

$\therefore m(\angle A) = m(\angle AED) = m(\angle ADE) = 60°$

$, AD = AE = DE = 8$

$\because CD = 5$

$\therefore AC = 5 + 8 = 13$

• في المثلث ACB:

$\because m(\angle C) = 90° , m(\angle A) = 60°$ $\therefore m(\angle B) = 30°$

∴ المثلث ACB ثلاثيني ستيني

$\because AC = \frac{1}{2} AB$ $\therefore AB = 2AC$ $\therefore AB = 2 \times 13 = 26$

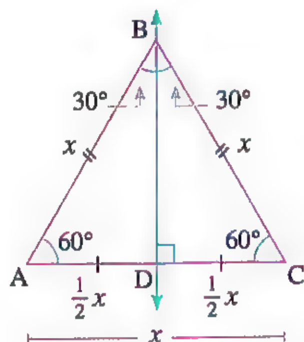
$\therefore x = EB = 26 - 8 = 18$

∴ x = EB = 18 سم

لاحظ أن

محور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين،

وكل منهما مثلث ثلاثيني ستيني.

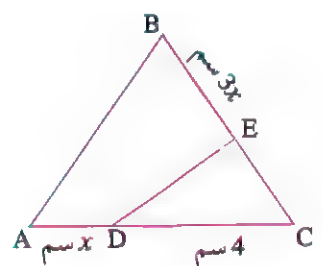


سؤال 5

① في الشكـل المقابـل:

إذا كان Δ ABC متساوى الأضلاع،

فأوجد قيـمة x



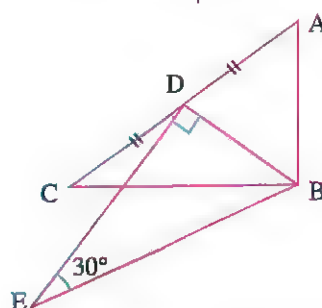
② في الشكـل المقابـل:

ABC مثلث، D منتصف $\overline{AC}$

$m(\angle DEB) = 30° , \overline{ED} \perp \overline{DB}$

BE = AC = 10 سم

أثبـت أن: المثلث ABC قائم الزاوية في B



أسئلة الكتاب المدرسى

محور تماثل القطعة المستقيمة:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 يسمى المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها .... لها.

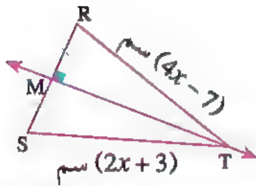
(أ) عمودًا (ب) منصفًا (جـ) متوسطًا (د) محور تماثل

2 إذا كان: المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{BC}$ ، $A \in \ell$ فإن: AC .... AB

(أ) = (ب) // (جـ) > (د) <

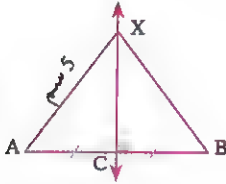
3 في الشكل المُقابل: ما قيمة x؟

(أ) 7 (ب) 10 (جـ) 5 (د) 3



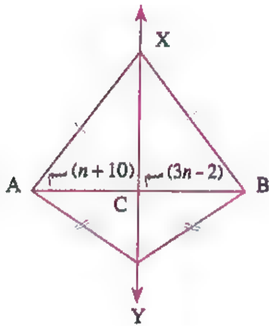
2 في الشكل المقابل:

أوجد طول $\overline{XB}$



3 في الشكل المقابل:

أوجد قيمة n



محور تماثل المثلث المتساوى الساقين:

4 اختر الإجابة الصحيحة:

1 عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) محور واحد (ب) محوران (جـ) ثلاثة محاور (د) أربعة محاور

2 عدد محاور التماثل فى المثلث المختلف الأضلاع ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

3 مثلث ABC فيه: AB = AC ، $m(\angle B) = 60°$ ، فإن عدد محاور تماثل مثلث ABC هو ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

4 إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم هو 45° فإن عدد محاور تماثله هو ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

5 إذا كان المثلث ABC له محور تماثل واحد وفيه $m(\angle ABC) = 110°$، فإن: $m(\angle A) =$ ....

(أ) 110°　(ب) 55°　(جـ) 70°　(د) 35°

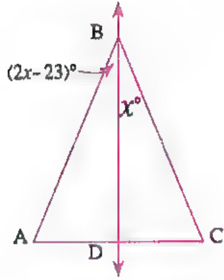
6 مثلث محيطه 18 سم، وله ثلاثة محاور تماثل فإن طول ضلعه = ... سم

(أ) 18　(ب) 6　(جـ) 3　(د) 9

7 عدد محاور تماثل المثلث الذى فيه قياس زاويتين 65°، 50° هو ....

(أ) 0　(ب) 1　(جـ) 2　(د) 3

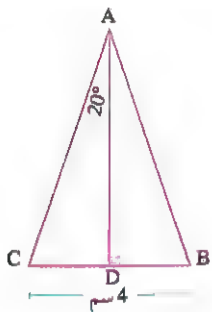
8 فى الشكل المُقابل: $m(\angle C) =$ ....



(أ) 23°　(ب) 46°

(جـ) 67°　(د) 60°

5 فى الشكل المقابل:

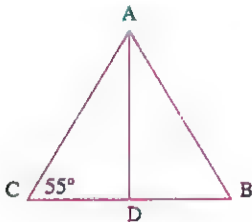


$AB = AC$، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$، $m(\angle CAD) = 20°$

$BC = 4$ سم

أوجد $m(\angle BAC)$، طول $\overline{BD}$

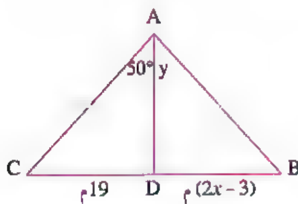
6 فى الشكل المقابل:



$AB = AC$، $DB = DC$، $m(\angle C) = 55°$

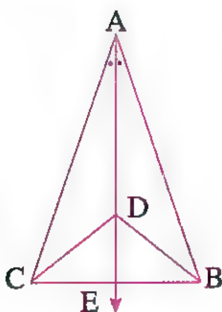
أوجد $m(\angle BAD)$

7 فى الشكل المقابل:



أوجد قيمة x، y

8 فى الشكل المقابل:



$AB = AC$، $\overrightarrow{AE}$ ينصف $(\angle BAC)$

$\overrightarrow{AE} \cap \overline{BC} = \{E\}$، $D \in \overrightarrow{AE}$

أثبت أن: 1 $BE = \frac{1}{2} BC$

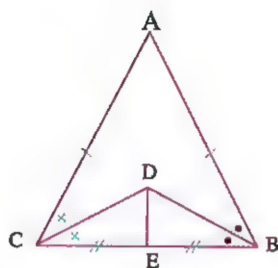
2 $BD = CD$

9 في الشكل المقابل:

$AB = AC$ ، $\overrightarrow{BD}$ ينصف $m(\angle ABC)$

$\overrightarrow{CD}$ ينصف $(\angle ACB)$، E منتصف $\overline{BC}$

أثبت أن: $\overline{DE} \perp \overline{BC}$

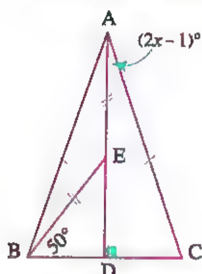


10 في الشكل المقابل:

$AB = AC$ ، $EA = EB$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$m(\angle EBD) = 50°$

أوجد قيمة x



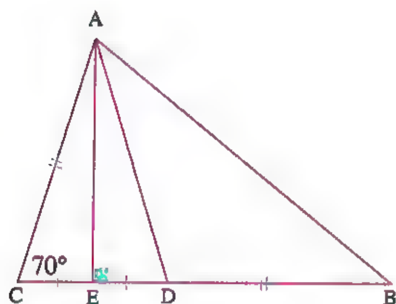
11 في الشكل المقابل:

مثلث ABC فيه: $m(\angle C) = 70°$

$D \in \overline{BC}$ بحيث: $BD = AC$

E منتصف $\overline{CD}$ ، $\overline{AE} \perp \overline{CD}$

أوجد $m(\angle B)$



12 في الشكل المقابل:

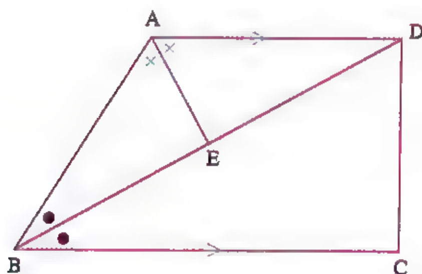
ABCD شكل رباعي فيه: $\overline{AD} // \overline{BC}$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $(\angle ABC)$،

$\overrightarrow{AE}$ ينصف $(\angle BAD)$،

أثبت أن:

1 $AB = AD$ **2** $\overline{AE} \perp \overline{BD}$

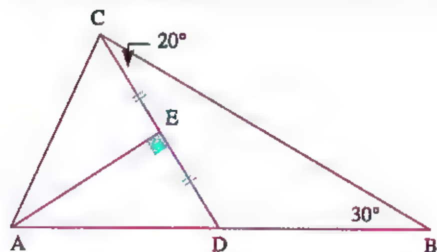


13 في الشكل المقابل:

$m(\angle DCB) = 20°$، $m(\angle B) = 30°$

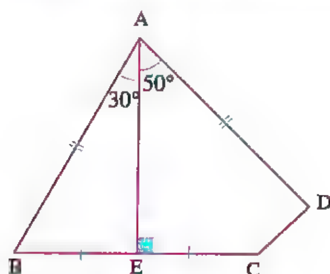
$\overline{AE} \perp \overline{CD}$ ، $CE = DE$

أوجد: $m(\angle CAE)$



14 في الشكل المقابل:

أوجد: $m(\angle D)$



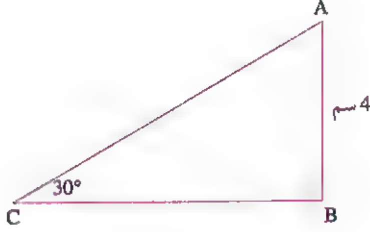
المثلث الثلاثينى الستينى:

15 اختر الإجابة الصحيحة:

1 طول الضلع المقابل للزاوية °30 فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر

(أ) ضعف (ب) ثُلث (جـ) نصف (د) رُبع

2 في الشكل المُقابل:

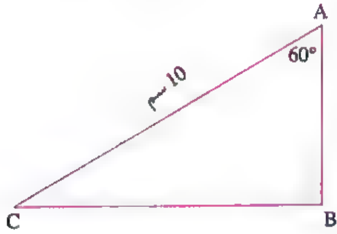


AC = ... سم

(أ) 2 (ب) 4

(جـ) 8 (د) 6

3 في الشكل المُقابل:

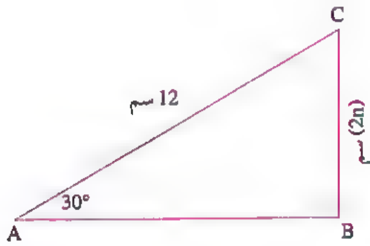


AB = ... سم

(أ) 20 (ب) 5

(جـ) 2.5 (د) 10

4 في الشكل المُقابل:

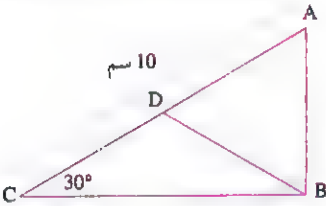


ما قيمة n ؟

(أ) 3 (ب) 6

(جـ) 9 (د) 12

16 فى الشكل المقابل:

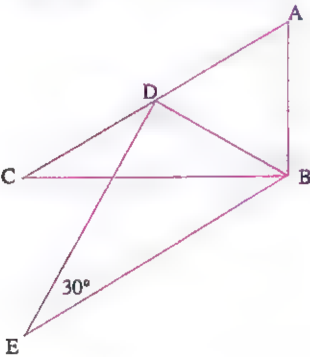


$m(\angle ABC) = 90°$ ، D منتصف $\overline{AC}$

$m(\angle C) = 30°$ ، AC = 10 سم

أوجد محيط مثلث ABD

17 فى الشكل المقابل:

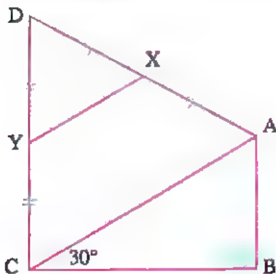


$m(\angle ABC) = m(\angle BDE) = 90°$

$m(\angle E) = 30°$ ، D منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: AC = BE

18 فى الشكل المقابل:

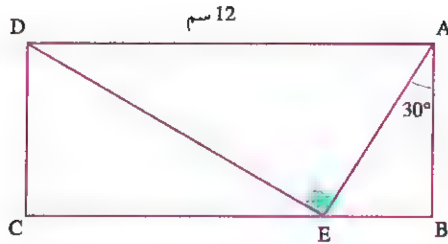


Y ، X منتصفا $\overline{AD}$ ، $\overline{DC}$ على الترتيب

$m(\angle B) = 90°$ ، $m(\angle ACB) = 30°$

أثبت أن: XY = AB

19 في الشكل المقابل:

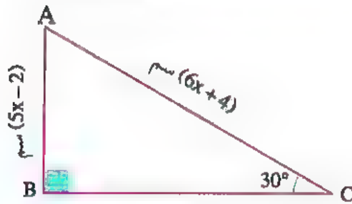


ABCD مستطيل، $E \in \overline{BC}$

$m(\angle AED) = 90°$ ، $AD = 12$سم

$m(\angle BAE) = 30°$ ، أوجد طول $\overline{BE}$

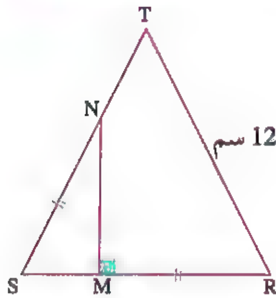
20 في الشكل المقابل:



أوجد طول $\overline{AC}$،

ثم أوجد مساحة المثلث ABC

21 في الشكل المقابل:



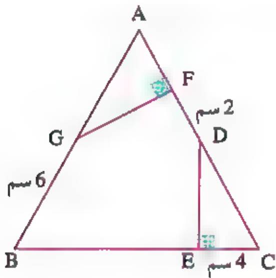
المثلث SRT متساوى الأضلاع

وطول ضلعه 12 سم، $\overline{NM} \perp \overline{SR}$

$MR = SN$

أوجد مع البرهان طول $\overline{NM}$

22 في الشكل المقابل:



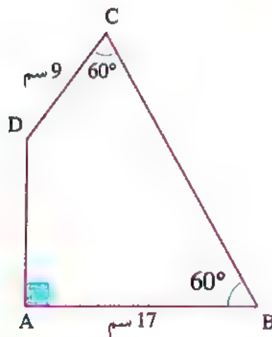
المثلث ABC متساوى الأضلاع

$EC = 4$ سم ، $FD = 2$ سم ، $GB = 6$ سم

أوجد مع البرهان محيط المثلث ABC

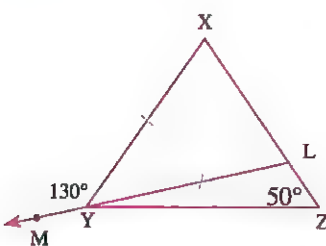


23 في الشكل المقابل:



أوجد مع البرهان طول $\overline{BC}$

24 في الشكل المقابل:



$M \in \overrightarrow{LY}$

أثبت أن: $XZ = YZ$

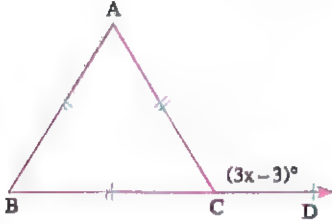
1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين 3 سم، 7 سم ، فما طول الضلع الثالث؟

(أ) 3 سم   (ب) 4 سم   (جـ) 7 سم   (د) 10 سم

2 إذا كان ABC مثلثًا متساوى الساقين، $m(\angle A) = 100^\circ$ فإن $m(\angle B) =$ ....

(أ) 80° (ب) 40° (جـ) 100° (د) 90°

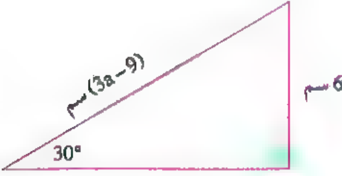


3 فى الشكل المقابل: ما قيمة x؟

(أ) 21   (ب) 120
(جـ) 60   (د) 41

4 عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) 0   (ب) 1   (جـ) 2   (د) 3

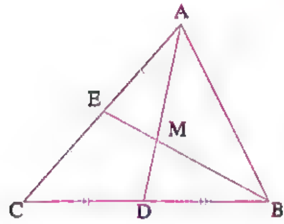


5 فى الشكل المقابل: ما قيمة a؟

(أ) 5   (ب) 3
(جـ) 12   (د) 7

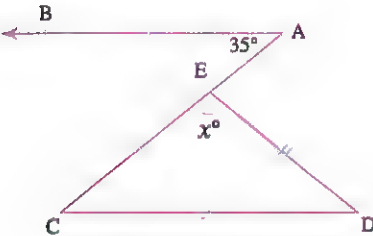
6 أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

(أ) 4 , 6 , 6   (ب) 7 , 9 , 15   (جـ) 12 , 16 , 20   (د) 7 , 8 , 5



7 فى الشكل المقابل: إذا كان AD = 9 سم، فإن MD = ... سم

(أ) 4.5   (ب) 3
(جـ) 6   (د) 9

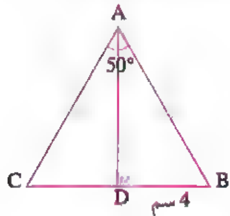


8 فى الشكل المقابل: ما قيمة x؟

(أ) 35   (ب) 70
(جـ) 90   (د) 110

2 أجب عما يأتى:

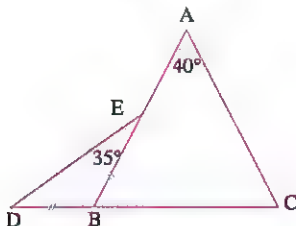
فى الشكل المقابل:



1 AB = AC ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، BD = 4 سم،

$m(\angle BAC) = 50^\circ$ أوجد: (أ) طول $\overline{BC}$ (ب) $(m\angle DAC)$

2 فى الشكل المقابل:



$m(\angle DEB) = 35^\circ$ ، $D \in \overrightarrow{CB}$

BE = BD ، $m(\angle A) = 40^\circ$

أثبت أن : AB = AC

ذاكر

الدرس 6

الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات
(Interior and Exterior Angles of Polygons)

نواتج التعلم

- يعرف الطالب الصيغة الرياضية لحساب مجموع قياسات زوايا المضلع المحدب الداخلة.
- يعرف الطالب مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب.
- يعرف الطالب الصيغة الرياضية لحساب قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم.
- يعرف الطالب الصيغة الرياضية لحساب عدد أقطار المضلع المحدب.

مفردات أساسية

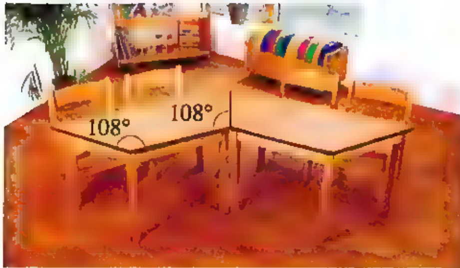


- مضلع **(Polygon)**
- مضلع محدب **(Convex Polygon)**
- زاوية خارجة **(Exterior Angle)**
- مضلع منتظم **(Regular Polygon)**
- زاوية داخلة **(Interior Angle)**

فكر وناقش

- أثنــاء تنظيم قاعة ريــاض الأطفال فى إحدى المدارس اســتخدم المعلم طاولات متطابقة، كل منها على شــكل شــبه منحرف متساوى الساقين كما بالشكل المقابل.

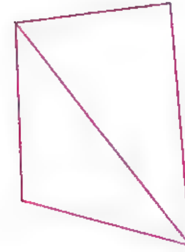
كم طاولة يحتاجها المعلم لتكوين مضلع منتظم؟



- فى هذا الدرس، سوف تتعرف على كيفية حساب مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع المحدب وحساب قياس زاوية المضلع المنتظم؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم 1 الصيغة الرياضية لمجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب:

• في كل مضلع من المضلعات التالية نقوم برسم جميع الأقطار التي يمكن رسمها من أحد رءوسه.



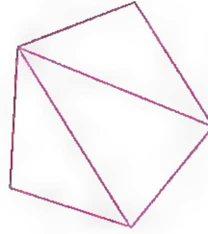
مضلع رباعي

• عدد الأضلاع = 4 أضلاع

• عدد المثلثات الناتجة = 2 مثلث

• مجموع قياسات زواياه الداخلة = 360°

(لأن: $2 \times 180° = 360°$)



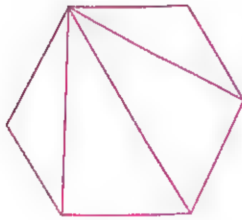
مضلع خماسي

• عدد الأضلاع = 5 أضلاع

• عدد المثلثات الناتجة = 3 مثلثات

• مجموع قياسات زواياه الداخلة = 540°

(لأن: $3 \times 180° = 540°$)



مضلع سداسي

• عدد الأضلاع = 6 أضلاع

• عدد المثلثات الناتجة = 4 مثلثات

• مجموع قياسات زواياه الداخلة = 720°

(لأن: $4 \times 180° = 720°$)

نستنتج من تكرار النمط السابق أن:

• الأقطار المرسومة من أحد رءوس مضلع عدد أضلاعه (n) تقسمه إلى عدد من المثلثات يساوي (n–2) مثلث.

• مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب = $(n-2) \times 180°$ (حيث n عدد أضلاع المضلع).

فمثلًا:

• مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع السباعي المحدب = 900° (لأن: $(7-2) \times 180° = 900°$)

• مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب ذي العشرة أضلاع = 1440° (لأن: $(10-2) \times 180° = 1440°$)

مثال 1

في كل مما يأتي، أوجد عدد أضلاع المضلع المحدب الذي مجموع قياسات زواياه الداخلة:

1 1260°　　**2** 2520°

الحل

1

$\because (n-2) \times 180° = 1260°$

$\therefore n-2 = \frac{1260°}{180°}$

$\therefore n-2 = 7$

$\therefore n = 7 + 2 = 9$

∴ عدد الأضلاع = 9 أضلاع

2

$\because (n-2) \times 180° = 2520°$

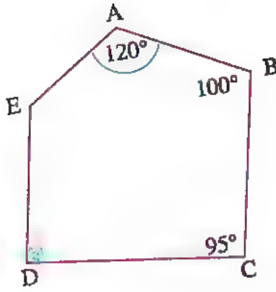
$\therefore n-2 = \frac{2520°}{180°}$

$\therefore n-2 = 14$

$\therefore n = 14 + 2 = 16$

∴ عدد الأضلاع = 16 ضلعًا

مثـال 2 في الشكل المقابـل:



$m(\angle B) = 100°$ ، $m(\angle A) = 120°$

$m(\angle D) = 90°$ ، $m(\angle C) = 95°$

أوجد: $m(\angle E)$

الحـل

∵ مجموع قياسات زوايا المضلع الخماسى ABCDE الداخلة = 540°

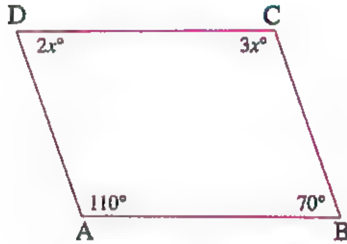
(لأن: $(n - 2) \times 180° = (5 - 2) \times 180° = 540°$ ◄)

$\therefore m(\angle E) + 120° + 100° + 95° + 90° = 540°$

$\therefore m(\angle E) + 405° = 540°$

$\therefore m(\angle E) = 540° - 405° = 135°$

مثـال 3 في الشكل المقابـل:



$m(\angle B) = 70°$ ، $m(\angle A) = 110°$

$m(\angle D) = 2x°$ ، $m(\angle C) = 3x°$

أوجد قيمة: x

الحـل

∵ مجموع قياسات زوايا المضلع الرباعى ABCD الداخلة = 360°

(لأن: $(n - 2) \times 180° = (4 - 2) \times 180° = 360°$ ◄)

$\therefore 3x° + 2x° + 110° + 70° = 360°$

$\therefore 5x° + 180° = 360°$ ⟵ $\therefore 5x° = 360° - 180°$

$\therefore 5x = 180$ ⟵ $\therefore x = \frac{180}{5} = 36$

∴ قيمة x هى 36

مثـال 4 في الشكل المقابـل:



طاولة طعام سطحها على شكل مضلع سداسى محدب

أوجد قيمة: a

الحـل

∵ مجموع قياسات زوايا المضلع السداسى الداخلة = 720°

(لأن: $(n - 2) \times 180° = (6 - 2) \times 180° = 720°$ ◄)

$\therefore 3a° + 4a° + 5a° + 5a° + 2a° + 5a° = 720°$

$\therefore 24a° = 720°$ ⟵ $\therefore a = \frac{720}{24} = 30$

∴ قيمة a هى 30

سؤال 1

1. أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب له اثنا عشر ضلعًا.
2. أوجد عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة.

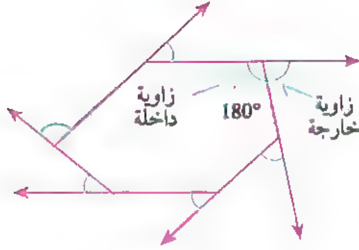
(أ) 1080°   (ب) 1440°

تعلم 2 مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب:

قاعدة: مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب يساوى $360°$ (زاوية واحدة عند كل رأس).

فمثلًا: مجموع قياسات الزوايا الخارجة «زاوية واحدة عند كل رأس» للمضلع السداسى المحدب، وذى الاثنى عشر ضلعًا المحدب متساويان ويساوى $360°$

• يمكننا استنتاج القاعدة السابقة كالآتى:



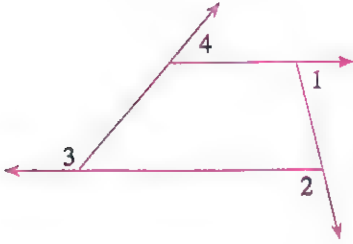
فى الشكل المقابل: عند كل رأس يوجد زوج من الزوايا، إحداهما خارجة والأخرى داخلة مجموع قياسيهما يساوى $180°$

، ∵ مجموع قياسات الزوايا عند كل رءوس المضلع = $180°\ n$

حيث n عدد أضلاع المضلع.

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة «زاوية واحدة عند كل رأس» هو:

$$180°\ n - (n - 2) \times 180° = 180°n - 180°n + 360° = 360°$$



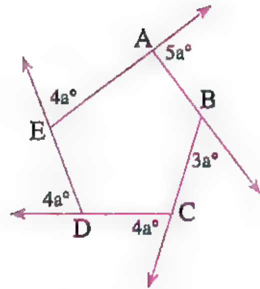
فمثلًا: فى الشكل المقابل:

• يوجد 4 زوايا خارجة «زاوية واحدة عند كل رأس»

$$m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) + m(\angle 4) = 360°$$

مثال 5 فى الشكل المقابل، أوجد:

1 قيمة a 2 $m(\angle BCD)$



الحل

∵ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب = $360°$

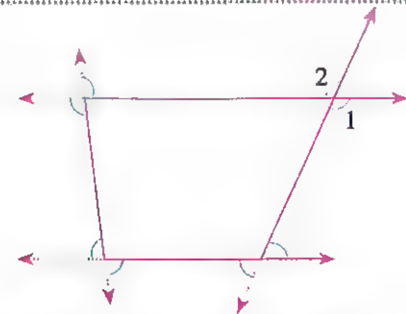
$\therefore 5a° + 3a° + 4a° + 4a° + 4a° = 360°$

$\therefore 20a° = 360°$ ⟶ $\therefore a = \frac{360}{20} = 18$

∴ قياس الزاوية الخارجة عند الرأس C = $72°$ (لأن: $4a = 4 \times 18 = 72$)

$\therefore m(\angle BCD) = 180° - 72° = 108°$

لاحظ أن



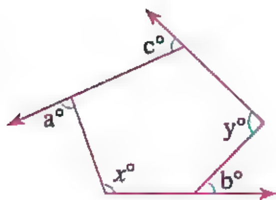
• لأى مضلع محدب توجد زاويتان خارجتان عند كل رأس من رءوسه كما بالشكل المقابل هاتان الزاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذلك فهما متساويتان فى القياس.

• قياس الزاوية الخارجة للمضلع + قياس الزاوية الداخلة المجاورة لها = $180°$

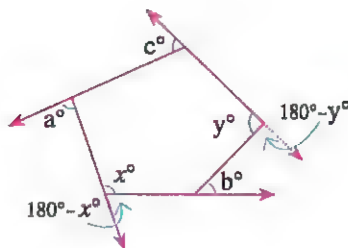
مثـال 6 فى الشكل المقابل:

إذا كان $x + y = 200$

أوجد بالبرهـان قيمة : $a + b + c$



الحـل



$180° - x°$ ، $180° - y°$ زاويتان خارجتان

∵ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب «زاوية واحدة عند كل رأس» $= 360°$

$\therefore a° + 180° - x° + b° + 180° - y° + c° = 360°$

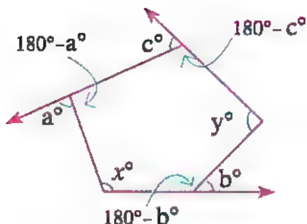
$\therefore a° + b° + c° - (x° + y°) + 360° = 360°$

$\therefore a° + b° + c° = 360° - 360° + (x° + y°)$

$\therefore a + b + c = x + y$

$\therefore a + b + c = 200$

حل آخر



∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الخماسى $= 540°$

$\therefore 180° - c° + y° + 180° - b° + x° + 180° - a° = 540°$

$\therefore x° + y° - (a° + b° + c°) + 540° = 540°$

$\therefore x° + y° - (a° + b° + c°) = 540° - 540° = 0$

$\therefore a + b + c = x + y$

$\therefore a + b + c = 200$

تعلم 3 الصيغة الرياضية لقياس زاوية المضلع المنتظم:

- المضلع المنتظم هو مضلع فيه:

1 جميع أضلاعه متساوية فى الطول.

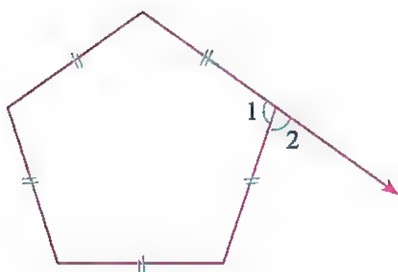
2 جميع زواياه الداخلة متساوية فى القياس.

◄ فى المضلـع المنتظـم الذى عدد أضـلاعه (n) ضلعًـا يكـون:

قيـاس الزاويـة الداخـلة $= \frac{(n-2) \times 180°}{n}$

قيـاس الزاويـة الخارجـة عند أحد رءوسـه $= \frac{360°}{n}$

فمثلًا: الشكل المقابل خماسى منتظم:



► $m(\angle 1) = \frac{(n-2) \times 180°}{n} = \frac{(5-2) \times 180°}{5} = 108°$

► $m(\angle 2) = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72°$

س؟ سؤال 2

1 أوجد قياس الزاوية الداخلة والزاوية الخارجة للمضلع السداسى المنتظم.

2 أوجد قياس الزاوية الداخلة والزاوية الخارجة للمضلع السباعى المنتظم.

مثال 7 في الشكل المقابل:

ABCD مضلع رباعى منتظم،

CEFGB مضلع خماسى منتظم

أوجد: m (∠ DCE)

الحل

∵ ABCD مضلع رباعى منتظم

$$m(\angle DCB) = \frac{(4-2)\times 180^\circ}{4} = 90^\circ$$

∵ CEFGB مضلع خماسى منتظم

$$m(\angle BCE) = \frac{(5-2)\times 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

$\because m(\angle DCB) + m(\angle DCE) + m(\angle BCE) = 360^\circ$ «زوايا متجمعة حول نقطة واحدة»

$\therefore 90^\circ + m(\angle DCE) + 108^\circ = 360^\circ$

$\therefore m(\angle DCE) + 198^\circ = 360^\circ$

$\therefore m(\angle DCE) = 360^\circ - 198^\circ = 162^\circ$

مثال 8 أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم فى كل مما يأتى:

1 إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة = 135°

2 إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة = 18°

الحل

1 ∵ المضلع منتظم ،

وقياس إحدى زواياه الداخلة = 135°

$\therefore \frac{(n-2)\times 180^\circ}{n} = 135^\circ$

$\therefore 180^\circ n - 360^\circ = 135^\circ n$

$\therefore 180^\circ n - 135^\circ n = 360^\circ$

$\therefore 45^\circ n = 360^\circ$

$\therefore n = \frac{360}{45} = 8$

∴ عدد أضلاع المضلع = 8 أضلاع

2 ∵ المضلع منتظم ،

وقياس إحدى زواياه الخارجة = 18°

$\therefore \frac{360^\circ}{n} = 18^\circ$

$\therefore 18^\circ n = 360^\circ$

$\therefore n = \frac{360}{18} = 20$

∴ عدد أضلاع المضلع = 20 ضلعًا



نقاط هامة

- يمكن إيجاد عدد أضلاع المضلع المنتظم كالآتى:

1 إذا علمت قياس زاويته الخارجة ← عدد الأضلاع = $\frac{360^\circ}{\text{الزاوية الخارجة}}$

2 إذا علمت قياس زاويته الداخلة ← عدد الأضلاع = $\frac{360^\circ}{\text{مكملة الزاوية الداخلة}}$

تعلم 4 الصيغة الرياضية لعدد أقطار المضلع المحدب:

عدد أقطار المضلع المحدب يساوى $\frac{n(n-3)}{2}$ ، حيث n هو عدد الأضلاع.

مثال 9 أوجد كلًّا مما يأتى:

1 عدد أقطار المضلع السباعى المحدب.

2 عدد أقطار المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة يساوى $150°$

3 عدد أقطار مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة يساوى $2340°$



الحل

1 عدد أقطار المضلع السباعى المحدب $= \frac{n(n-3)}{2} = \frac{7(7-3)}{2} = 14$ قطرًا.

2 عدد أضلاع المضلع المنتظم $= \frac{360°}{\text{مكملة الزاوية الداخلة}} = \frac{360°}{180° - 150°} = \frac{360°}{30°} = 12$ ضلعًا.

∴ عدد الأقطار $= \frac{12(12-3)}{2} = 54$ قطرًا.

3 $\because (n-2) \times 180° = 2340°$ ⟶ $\therefore n - 2 = \frac{2340}{180} = 13$

$\therefore n = 13 + 2 = 15$

∴ عدد الأقطار $= \frac{15(15-3)}{2} = 90$ قطرًا.

مثال 10 أوجد عدد أضلاع مضلع محدب له 27 قطرًا:

الحل

∵ عدد الأقطار = 27 قطرًا.

$\therefore \frac{n(n-3)}{2} = 27$ ⟶ $\therefore n(n-3) = 54$

$\therefore n^2 - 3n - 54 = 0$

$\therefore (n+6)(n-9) = 0$

إما $n + 6 = 0$ ومنها $\therefore n = -6$ (مرفوض)

أو $n - 9 = 0$ ومنها $n = 9$ ∴ عدد الأضلاع = 9 أضلاع.

سؤال 3

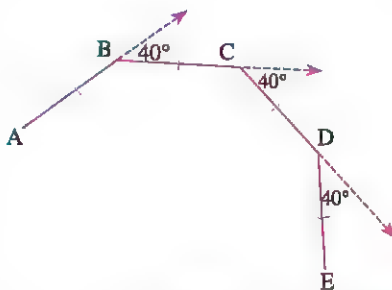
1 ما عدد أقطار المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة يساوى $144°$

2 ما عدد أقطار المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الخارجة يساوى $120°$

3 إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع يساوى $2160°$ أوجد عدد أقطاره.

4 فى الشكل المقابل:

ما عدد أضلاع المضلع المنتظم عند اكتمال رسمه بنفس النمط.



أسئلة الكتاب المدرسى

الصيغة الرياضية لمجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الصيغة الرياضية لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب عدد أضلاعه n هى ....

(أ) $(n - 2)$ (ب) $(n - 2) \times 180°$ (جـ) $(n - 3) \times 180°$ (د) $(n + 2) \times 180°$

2 عدد المثلثات التى ينقسم إليها مضلع عدد أضلاعه 9 أضلاع يساوى .... مثلثًا عند رسم الأقطار من أحد رءوسه.

(أ) 11 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 12

3 مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الثمانى المحدب يساوى ....

(أ) 720° (ب) 900° (جـ) 1080° (د) 1260°

4 مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسى المحدب يساوى ....

(أ) 720° (ب) 360° (جـ) 540° (د) 900°

5 عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة 180° يساوى .... أضلاع.

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

6 عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة 540° يساوى .... أضلاع.

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

7 عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة 1440° يساوى .... أضلاع.

(أ) 6 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 10

8 ما عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة 2340° ؟ .... ضلعًا.

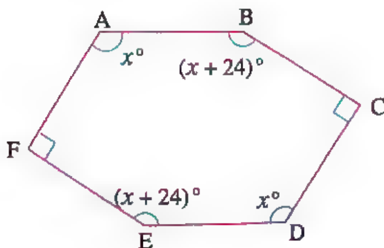
(أ) 12 (ب) 13 (جـ) 14 (د) 15

2 أوجد فى كل مما يأتى عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة:

1 900° 2 360° 3 1800° 4 1620° 5 2520°

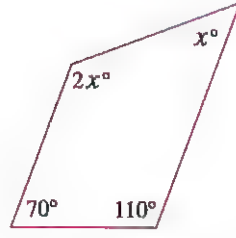
3 فى الشكل المقابل:

أوجد بالبرهان: $m(\angle E)$

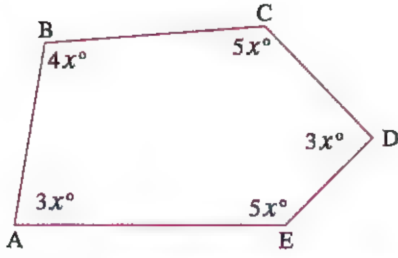


4 في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x :

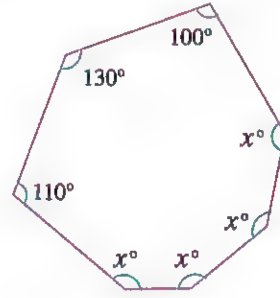
1



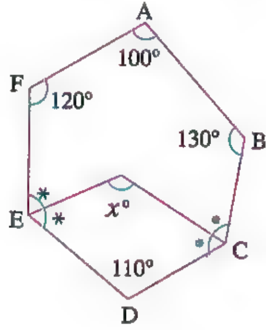
2



3



4



مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب:

5 اختر الإجابة الصحيحة:

1 مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب (زاوية واحدة عند كل رأس) يساوى ....

(أ) 120°　　(ب) 360°　　(جـ) 720°　　(د) 180°

2 مجموع قياسي الزاوية الداخلة والخارجة المجاورة لها عند أي رأس من رءوس المضلع المحدب = ...

(أ) 72°　　(ب) 108°　　(جـ) 180°　　(د) 360°

3 في الشكل المقابل:

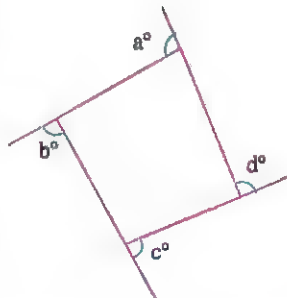
ما قيمة a + b + c + d ؟

(أ) 180

(ب) 360

(جـ) 540

(د) 720



4 في الشكل المقابل:

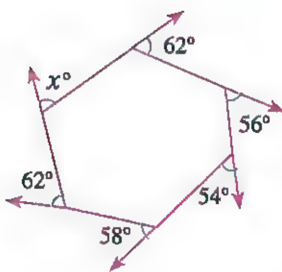
ما قيمة x ؟

(أ) 58

(ب) 62

(جـ) 68

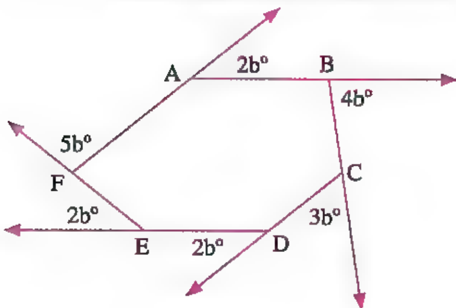
(د) 72



6 في الشكل المقابل:

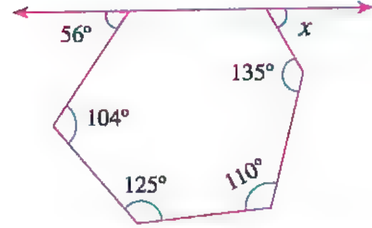
أوجد: 1 قيمة b

2 m (∠AFE)

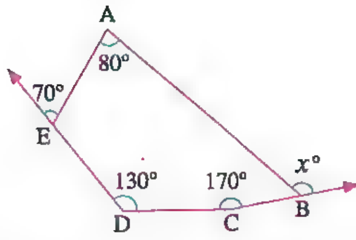


7 في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المجهول :

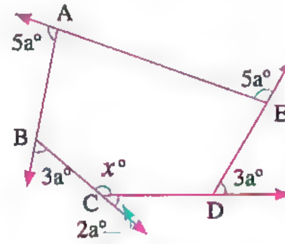
1



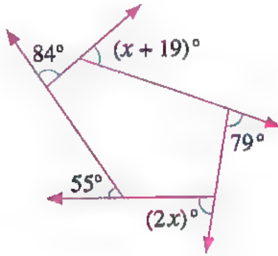
2



3



4



الصيغة الرياضية لقياس زاوية المضلع المنتظم

8 اختر الإجابة الصحيحة:

1 قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه n = ...

(أ) $(n-2)\times 180°$ (ب) $\frac{n(n-3)}{2}$ (جـ) $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$ (د) $\frac{360°}{n}$

2 قياس الزاوية الخارجة عند أحد رءوس المضلع المنتظم = ...

(أ) $\frac{360°}{n}$ (ب) $360°$ (جـ) $180°n$ (د) $\frac{180°}{n}$

3 ما قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم ذى 18 ضلعًا؟ ....

(أ) $135°$ (ب) $144°$ (جـ) $150°$ (د) $160°$

4 قياس الزاوية الداخلة للخماسى المنتظم = ...

(أ) $120°$ (ب) $90°$ (جـ) $108°$ (د) $180°$

5 ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الخارجة $20°$ ؟ .... ضلع.

(أ) 12 (ب) 14 (جـ) 16 (د) 18

6 ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة $144°$ ؟ .... أضلاع.

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 14

7 عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الخارجة $72°$ يساوى .... أضلاع.

(أ) 6 (ب) 5 (جـ) 4 (د) 7

8 قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم عدد أضلاعه 15 تساوى ....

(أ) $156°$ (ب) $180°$ (جـ) $150°$ (د) $144°$

9 أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم فى كل مما يأتى:

1 إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة = $120°$

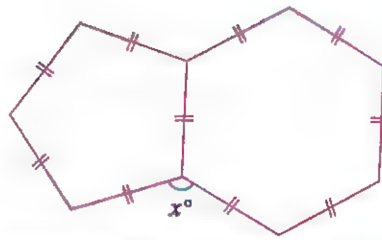
2 إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة = $144°$

3 إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة = $72°$

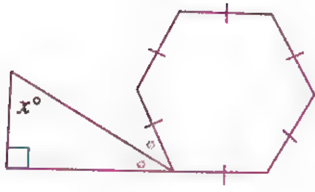
4 إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة = $24°$

10 أوجد قيمة x فى كل مما يأتى:

1



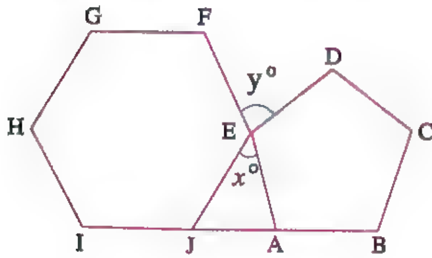
2



11 فى الشكل المقابل:

ABCDE خماسى منتظم، EFGHIJ سداسى منتظم $\overline{BI}$ ∋ A ،

أوجد قيمة كل من: x ، y



الصيغة الرياضية لعدد أقطار المضلع المحدب:

12 اختر الإجابة الصحيحة:

1 عدد أقطار المضلع السداسى المحدب = ... أقطار.

(أ) 6 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 9

2 عدد أقطار المضلع الخماسى المحدب = ... أقطار.

(أ) 5 (ب) 6 (جـ) 7 (د) 8

3 عدد أقطار المثلث = ... قطر.

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 0 (د) 3

4 ما عدد أقطار المضلع السباعى المحدب؟ .... قطر.

(أ) 7 (ب) 11 (جـ) 13 (د) 14

5 عدد أقطار المضلع الثمانى المحدب = ... قطر.

(أ) 8 (ب) 20 (جـ) 19 (د) 14

6 عدد أضلاع المضلع الذى عدد أقطاره 44 قطرًا يساوى .... ضلعًا.

(أ) 11 (ب) 12 (جـ) 13 (د) 14

13 أوجد كلًا مما يأتى:

1 عدد أقطار المضلع التساعى المحدب.

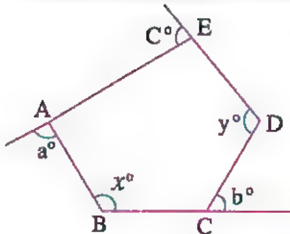
2 عدد أقطار المضلع ذو 17 ضلعًا.

3 عدد أضلاع مضلع محدب عدد أقطاره 54 قطرًا.

14 فى الشكل المقابل:

$x + y = 230$

أوجد بالبرهان قيمة: $a + b + c$



TIMSS تفكير إبداعى

15 إذا زاد عددُ أضلاع مضلع منتظم ضلعين آخرين، فإن قياس الزاوية الخارجة يقل بمقدار 9° ،

فكم عدد أضلاع المضلع؟

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه 3 سم، 5 سم فإن طول الضلع الثالث = ... سم.

(أ) 4 | (ب) 6 | (جـ) 8 | (د) 5

2 إذا كان C تنتمى لمحور تماثل $\overline{AB}$ فإن: BC .... AC

(أ) $\cong$ | (ب) // | (جـ) = | (د) $\perp$

3 $\overline{BD}$ متوسط فى المثلث ABC القائم الزاوية B ، G نقطة تقاطع متوسطاته فإذا كان GD = 3 سم،

فإذا طول $\overline{AC}$ = ... سم.

(أ) 18 | (ب) 6 | (جـ) 9 | (د) 10

4 طول القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى ... . طول الضلع الثالث.

(أ) نصف | (ب) ربع | (جـ) ضعف | (د) خُمس

5 عدد أقطار الشكل السداسى = ... أقطار.

(أ) 5 | (ب) 3 | (جـ) 6 | (د) 9

6 عدد أضلاع المضلع المحدب الذى قياس إحدى زواياه الخارجة 36° يساوى .... أضلاع.

(أ) 5 | (ب) 9 | (جـ) 10 | (د) 8

7 أى الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ؟ ....

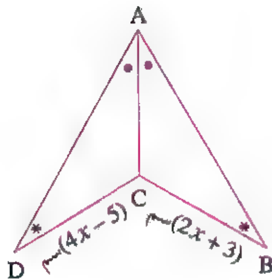
(أ) 3 , 8 , 10 | (ب) 9 , 12 , 15 | (جـ) 4 , 5 , 8 | (د) 8 , 6 , 11

8 فى الشكل المقابل:

طول $\overline{CB}$ = ... سم.

(أ) 4 | (ب) 12

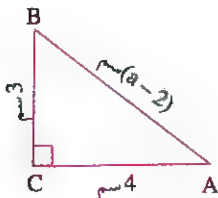
(جـ) 11 | (د) 10



9 فى الشكل المقابل: قيمة a تساوى ....

(أ) 5 | (ب) 8

(جـ) 7 | (د) 3



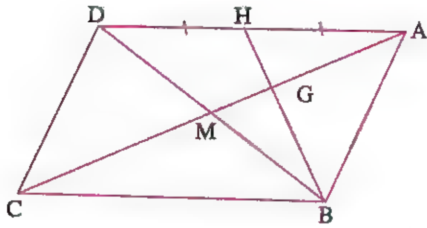
2 أجب عما يأتى:

1 فى الشكل المقابل:

ABCD متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى M ،

H منتصف $\overline{AD}$

أثبت أن: AG = 2GM

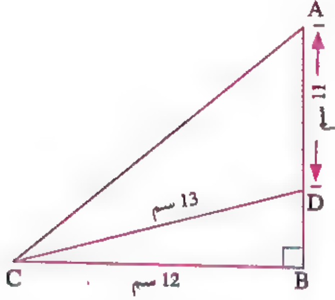


2 فى الشكل المقابل:

AD = 11 سم، DC = 13 سم ، BC = 12 سم ،

m (∠CBD) = 90°

أوجد بالبرهان: طول $\overline{AC}$

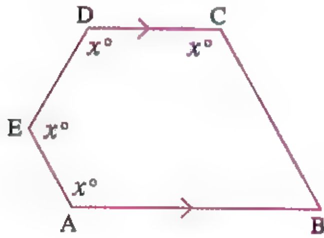


3 فى الشكل المقابل:

$\overline{DC}$ // $\overline{AB}$ ،

m (∠A) = m (∠E) = m (∠D) = m (∠C) = x °

أوجد بالبرهان: m (∠B)

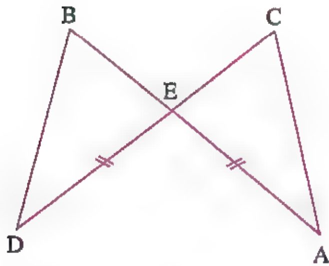


4 فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{BA}$ ∩ $\overleftrightarrow{CD}$ = {E} ، DE = AE

m (∠A) = m (∠D)

أثبت أن: ΔAEC ≅ ΔDEB



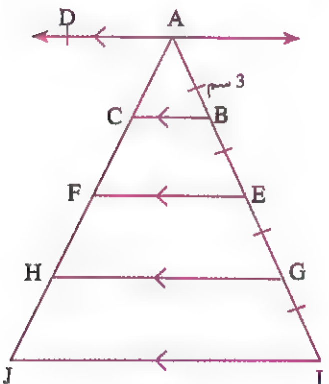
5 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overline{CB}$ // $\overline{FE}$ // $\overline{HG}$ // $\overline{IJ}$

، GI = EG = BE = AB = 3 سم

، AJ = 8 سم، EF = 5 سم

أوجد: محيط المثلث AEF



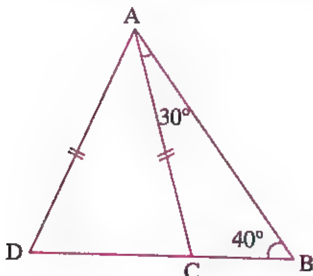
6 فى الشكل المقابل:

m (∠BAC) = 30° ، m (∠B) = 40°

AC = AD

أوجد بالبرهان: 1 m (∠D)

2 m (∠CAD)



7 أوجد عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة 1440° ، كذلك عدد أقطاره.

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 فى الشكل المقابل:

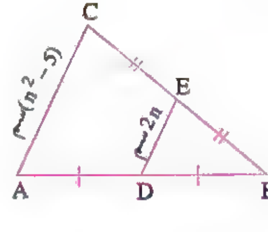
ما قيمة في n ؟ ....

(أ) 5

(ب) 1

(جـ) 4

(د) 2



2 فى الشكل المقابل:

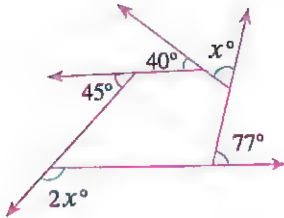
ما قيمة x ؟ ....

(أ) 77

(ب) 45

(جـ) 55

(د) 66



3 فى الشكل المقابل:

N , Q منتصفا $\overline{TR}$, $\overline{SR}$ على الترتيب،

TR = 12سم ، ST = 9سم

m (∠STR) = 90°

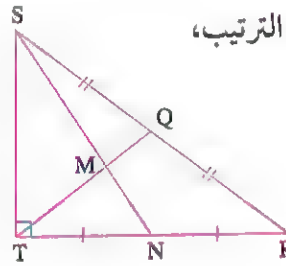
فما طول $\overline{MT}$ ؟ ....

(أ) 2.5 سم

(ب) 5 سم

(جـ) 7.5 سم

(د) 15 سم



4 فى الشكل المقابل:

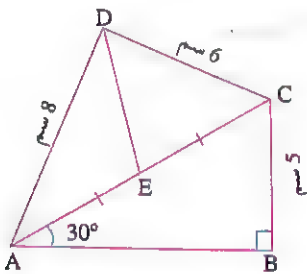
ما طول $\overline{DE}$ ؟

(أ) 6 سم

(ب) 8 سم

(جـ) 10 سم

(د) 5 سم



2 أكمل كلًّا مما يأتى بالإجابة الصحيحة:

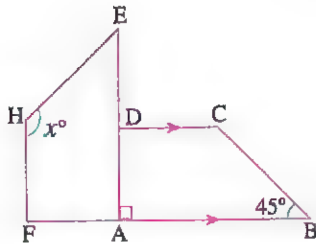
1 عدد أضلاع المضلع المحدب الذى له 20 قطرًا هو .... أضلاع.

2 نوع المثلث الذى أطوال أضلاعه 6سم، 7سم، 8 سم بالنسبة لزواياه هو ....

3 فى الشكل المقابل:

إذا كان المضلع AEHF صورة

المضلع ABCD بدوران ما، فإن: .... = x



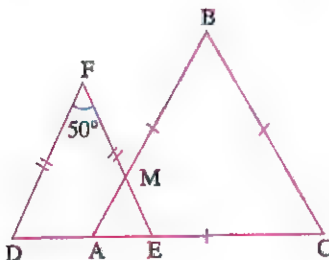
4 فى الشكل المقابل:

Δ ABC متساوى الأضلاع،

Δ DEF متساوى الساقين فيه:

m (∠F) = 50° , FD = FE

فإن: .... = m (∠AME)



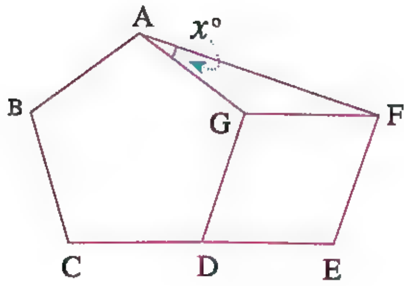
3 أجب عن الأسئلة الآتية:

1 فى الشكل المقابل:

ABCDG خماسى

منتظم ، GDEF معين

أوجد قيمة x



2 فى الشكل المقابل:

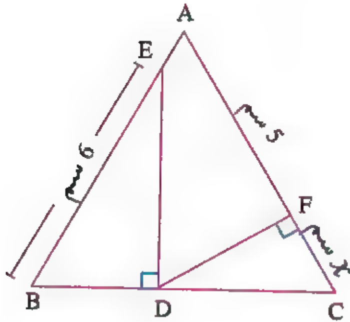
ABC مثلث متساوى الأضلاع

$\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{ED} \perp \overline{BC}$،

AF = 5سم ، BE = 6سم

طول $\overline{FC} = x$ سم

أوجد قيمة x مع البرهان.



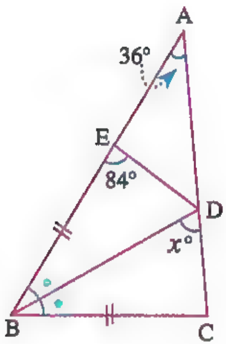
3 فى الشكل المقابل:

BC = BE

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

1 أثبت أن: $\Delta BCD \cong \Delta BED$

2 أوجد قيمة x



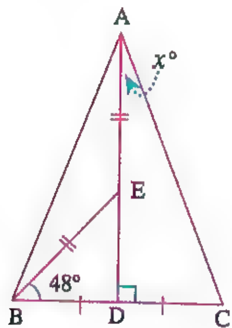
4 فى الشكل المقابل:

$BD = CD$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$،

، AE = BE

$m(\angle EBD) = 48°$

أوجد مع البرهان قيمة x



الوحدة الرابعة 4

الإحصاء



دروس الوحدة

الدرس الأول: الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا

(Ascending cumulative Frequency Table and its Graphical Representation)

الدرس الثانى: مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات

(Measurements of Central Tendency of the Frequency Table with Intervals)

تستخدم خوارزميات تعلم آليات الذكاء الاصطناعى فى أساليب إحصائية، مثل: تحليل الانحدار، والتوزيع الطبيعى لتحليل أداء الطالب، واقتراح مسارات تعليمية مناسبة له.

- **فهل يمكن تطوير خوارزميات آليات الذكاء الاصطناعى لحل المشكلات الإحصائية المعقدة؟**

القضايا والمهارات الحياتية:

- تكنولوجيا المعلومات.
- اتخاذ القرار.
- التفكير الإبداعى.
- التنبؤ.

القيم:

- المسئولية.
- ترشيد الإنفاق.
- العدل فى التوزيع.
- احترام الآخر.

ذاكر

الدرس 1

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا

(Ascending cumulative Frequency Table and its Graphical Representation)





نواتج التعلم

- يُكوِّن الطالب جدولًا تكراريًا متجمعًا صاعدًا لجدول تكرارى ذى مجموعات.
- يرسم الطالب المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

مفردات أساسية

- جدول تكرارى ذو مجموعات **(Frequency table with intervals)**
- جدول تكرارى متجمع صاعد **(Ascending cumulative frequency table)**
- منحنى تكرارى متجمع صاعد **(Ascending cumulative frequency curve)**



فكر وناقش:

- قامت إحدى المدارس بوزن 50 طالبًا من طلابها فى مراحل مختلفة، وكانت كتل الطلاب بالكيلوجرام كالآتى:

كتل الطلاب «كيلو جرام»	30 –	40 –	50 –	60 –	70 –	80 –
التكرار	6	2	8	14	16	4

هل يمكنك حساب النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين كتلتهم أقل من 60 كيلو جرامًا؟

- فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تكوين جدول تكرارى متجمع صاعد، والذى سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم تكوين جدول تكرارى متجمع صاعد وتمثيله بيانيًا:

درست فيما سبق إذا كانت كمية البيانات كبيرة فيتم تنظيمها فى مجموعات أو فترات متساوية، ومنها نكوِّن الجدول التكرارى ذى المجموعات:

فمثلًا: البيانات التالية تمثل درجات 50 طالبًا فى مادة الرياضيات:

10	20	30	30	28	29	30	21	11	31
32	32	35	26	31	35	22	17	24	34
39	21	32	13	38	33	25	39	43	45
51	46	52	49	55	37	40	30	41	31
32	42	50	35	36	37	23	19	26	27

- درسنا فيما سبق أنه يمكن تنظيم البيانات السابقة فى جدول تكرارى ذى مجموعات باستخدام فترات متساوية، ويكون

المجموعات «الدرجات»	– 10	– 20	– 30	– 40	– 50
عدد الطلاب «التكرار»	5	12	22	7	4

- ومن خلال هذا الجدول يمكن الحصول على بعض المعلومات مباشرة، مثل:
  - يمكن معرفة عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمى للفترة]20 , 30] وهم 12 طالبًا.
  - يمكن معرفة عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمى للفترة]40 , 50] وهم 7 طلاب.

ولكن لا نستطيع الحصول على بعض المعلومات الأخرى بطريقة مباشرة من الجدول، مثل:

- عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة.
  - نحتاج إلى جمع ← 5 + 12 = 17
- عدد الطلاب الذين حصلوا على 20 درجة فأكثر.
  - نحتاج إلى جمع ← 12 + 22 + 7 + 4 = 45 طالبًا.

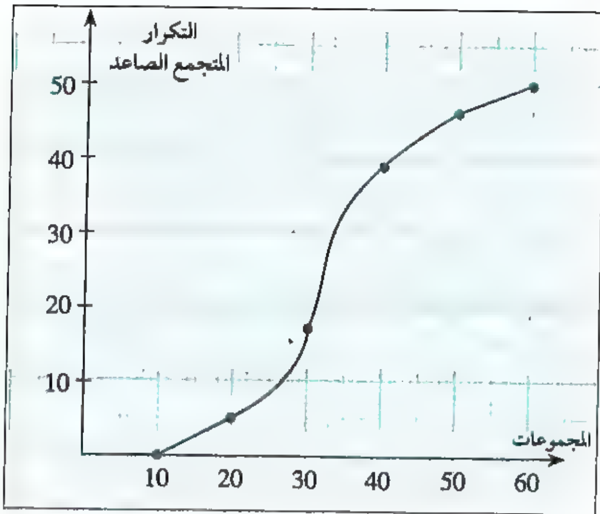


وحتى نستطيع الحصول على هذه المعلومات مباشرة سوف نتعلم كيفية تكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كالتالى:

الدرجات	التكرار	
– 10	5	5 (أقل من 20)
– 20	12	5 + 12 = 17 (أقل من 30)
– 30	22	17 + 22 = 39 (أقل من 40)
– 40	7	39 + 7 = 46 (أقل من 50)
– 50	4	46 + 4 = 50 (أقل من 60)

• اكتب هذه البيانات فى جدول كالتالى والذى يمثل بيانيًا كما يلى:

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 10	0
أقل من 20	5
أقل من 30	17
أقل من 40	39
أقل من 50	46
أقل من 60	50



لاحظ أن

• لا يوجد طالب درجته أقل من 10 درجات، أى أن التكرار المتجمع الصاعد للطلاب الذين حصلوا على أقل من 10 درجات هو صفر؛ ولذلك التكرار المتجمع الصاعد يبدأ دائمًا بالصفر، وينتهى بالتكرار الكلى.

مثال 1

الجدول التالى يوضح كتل 20 صندوقًا بالكيلو جرام:

الفترات (كجم)	45 –	50 –	55 –	60 –	65 –	70 –
التكرار	2	3	3	6	4	2

1 كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًّا.

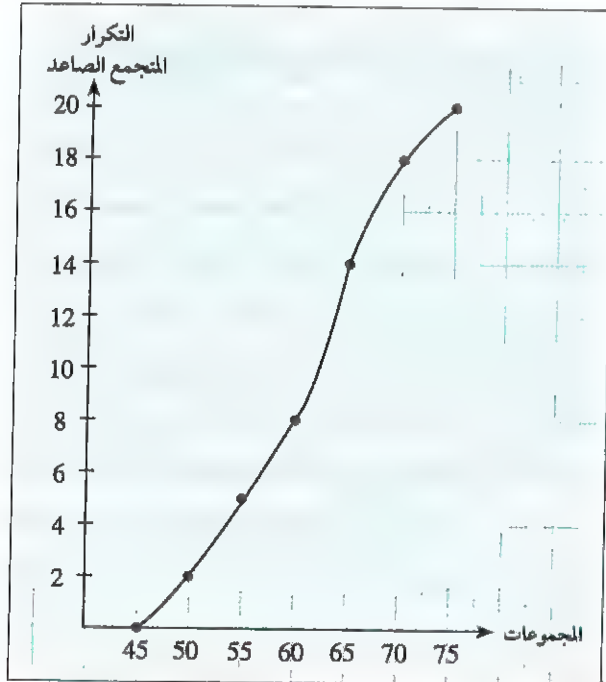
2 أوجد عدد الصناديق التى كتلتها أقل من 60 كيلو جرامًا.

3 النسبة المئوية لعدد الصناديق التى كتلتها 55 كيلو جرامًا أو أكثر.

الحل

1

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 45	0
أقل من 50	2
أقل من 55	5
أقل من 60	8
أقل من 65	14
أقل من 70	18
أقل من 75	20



2 8 صناديق.

3 عدد الصناديق التى كتلتها 55 كيلو جرامًا أو أكثر هو 15 صندوقًا (لأن: $20 - 5 = 15$)

∴ النسبة المئوية = 75% (لأن: $\frac{15}{20} \times 100\% = 75\%$)

مثال 2

الجدول المقابل يبين التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد لأطوال 25 لاعبًا فى فريق كرة السلة بالسنتيمتر لأحد الفرق المشاركة بدورى كرة السلة:

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 165	0
أقل من 170	10
أقل من 175	19
أقل من 180	23
أقل من 185	25

1 ما عدد اللاعبين الذين أطوالهم أقل من 175 سم؟

2 ما عدد اللاعبين الذين أطوالهم 180 سم أو أكثر؟

3 كوِّن الجدول التكرارى ذا المجموعات.

الحل

1 عدد اللاعبين الذين أطوالهم أقل من 175 سم = 19 لاعبًا.

2 عدد اللاعبين الذين أطوالهم 180 سم أو أكثر = 2 لاعب (لأن: 2 = 23 − 25 ◄)

3

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 165	0
أقل من 170	10
أقل من 175	19
أقل من 180	23
أقل من 185	25

(–165) 10 − 0 = 10

(–170) 19 − 10 = 9

(–175) 23 − 19 = 4

(–180) 25 − 23 = 2

الجدول التكرارى ذى المجموعات

الطول (سم)	التكرار
– 165	10
– 170	9
– 175	4
– 180	2

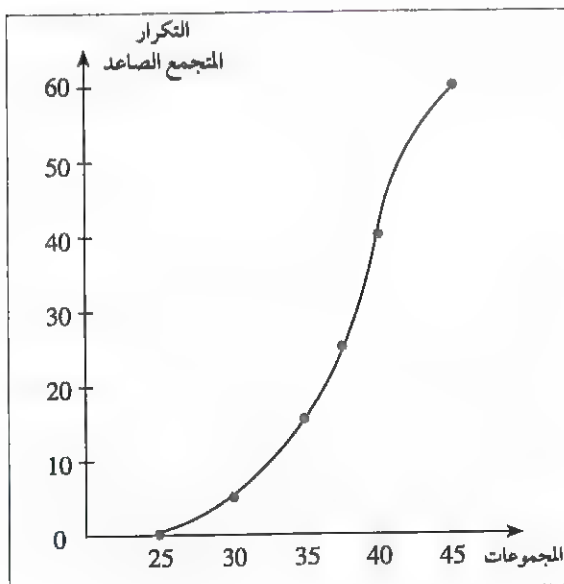
مثال 3

الشكل المقابل يمثل المنحنى المتجمع الصاعد لدرجات 60 طالبًا فى مادة الرياضيات:

1 ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 35 درجة؟

2 النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة.

3 ما عدد الطلاب الذين درجاتهم تنتمى للفترة]30 , 35[؟



الحل

1 عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 35 درجة = 15 طالبًا

2 النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة = $8\frac{1}{3}\%$ طالبًا

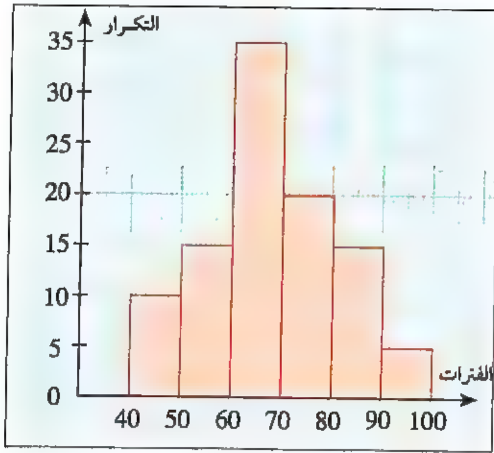
(لأن: $8\frac{1}{3}\% = \frac{5}{60} \times 100\%$ ◄)

3 عدد الطلاب الذين درجاتهم تنتمى للفترة]30 , 35[= 10 طلاب

(لأن: 10 = 5 − 15 ◄)

مثـال 4

إذا كان المـدرج التكـرارى التالـى يوضـح أطـوال 100 سـمكة تـم اصطيادها فى إحـدى مسـابقات الصـيد مقيسـة لأقرب سنتيمـتر.



1 كوِّن الجدول التكرارى ذى المجموعات.

2 كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًّا.

3 أوجد النسبة المئوية للأسماك التى طولها أقل من 60 سنتيمترًا.

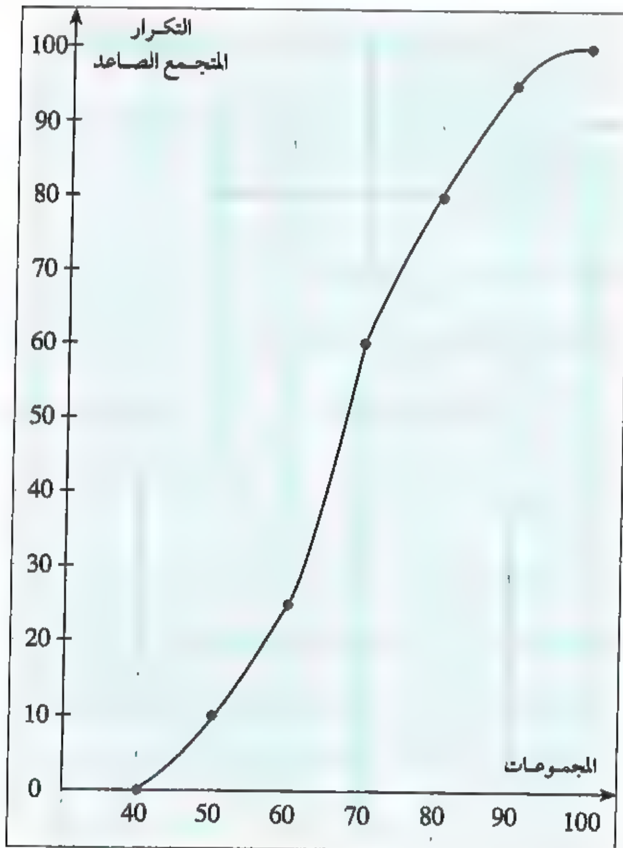
الحـل

1 الجدول التكرارى ذو المجموعات.

الفـترات	40 –	50 –	60 –	70 –	80 –	90 –
التكـرار	10	15	35	20	15	5

2 الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًّا.

الحـدود العلـيا للمجموعات	التكـرار المتجمع الصـاعد
أقل من 40	0
أقل من 50	10
أقل من 60	25
أقل من 70	60
أقل من 80	80
أقل من 90	95
أقل من 100	100



3 النسبة المئوية لعدد الأسماك التى طولها أقل من 60 سنتيمترًا

$= 25\%$ (لأن: $\frac{25}{100} \times 100\% = 25\%$)

سؤال 1

فيمـا يلـى جـدول يُمثِّـل درجـات الحـرارة التى سجلـت خلال 100 يوم:

الفـترات	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –
التكـرار	17	23	40	15	5

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًّا.

مثال 5 مخطط الساق والأوراق التالى يوضح عدد ساعات المذاكرة شهريًا لعدد 25 طالبًا.

1 كوِّن الجدول التكرارى ذى المجموعات.

2 كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًا.

3 أوجد عدد الطلاب الذين يذاكرون أقل من 140 ساعة شهريًا.

4 النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين يذاكرون أقل من 130 ساعة شهريًا.

الساق	الأوراق
11	0 1
12	1 2 3 7
13	0 4 5 6 9 9 9
14	2 3 3 8 8 9
15	0 0 2 4 6 7

المفتاح 1 | 11 يعنى 111 ساعة

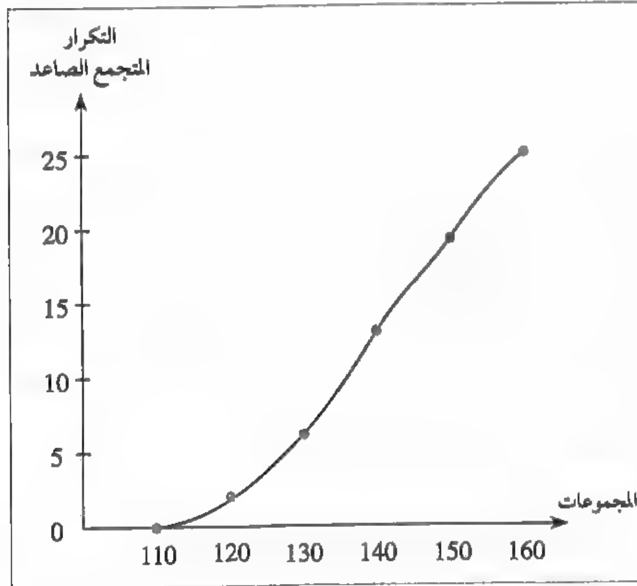
الحل

1 الجدول التكرارى ذى المجموعات.

المجموعات «عدد ساعات المذاكرة»	– 110	– 120	– 130	– 140	– 150
التكرار «عدد الطلاب»	2	4	7	6	6

2 الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 110	0
أقل من 120	2
أقل من 130	6
أقل من 140	13
أقل من 150	19
أقل من 160	25



3 عدد الطلاب الذين يذاكرون أقل من 140 ساعة شهريًا يساوى 13 طالبًا.

4 النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين يذاكرون أقل من 130 ساعة شهريًا تساوى 24% (لأن: $\frac{6}{25} \times 100\% = 24\%$)

سؤال 2

مخطط الساق والأوراق المقابل يوضح أطوال 30 طالبًا بالسنتيمتر فى مراحل مختلفة:

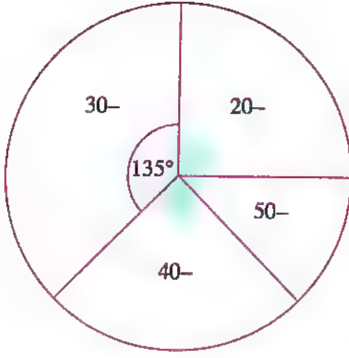
❶ كوِّن الجدول التكرارى ذى المجموعات.

❷ كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًا.

الساق	الأوراق
13	0 0 1 1 2 3 5
14	0 1 2 3 3 7 7 7 8 9 9 9 9
15	1 3 4 5 6 9
16	0 0 1 2

المفتاح 0 | 13 يعنى 130 سم

مثال 6 يوضح مخطط القطاعات الدائرية المقابل:



عدد الموظفين بإحدى الشركات حسب أعمارهم بالسنوات (20–, 30–, ...)، فإذا كان العدد الكلى للموظفين 400 موظف، فكوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثّله بيانيًّا.

الحل

- عدد الموظفين الذين أعمارهم من 20 سنة وأقل من 30 سنة = 100 موظف
  (لأن: $\frac{90^\circ}{360^\circ} \times 400 = 100$)
- عدد الموظفين الذين أعمارهم من 30 سنة وأقل من 40 سنة = 150 موظف
  (لأن: $\frac{135^\circ}{360^\circ} \times 400 = 150$)
- عدد الموظفين الذين أعمارهم من 40 سنة وأقل من 50 سنة = 100 موظفًا
  (لأن: $\frac{90^\circ}{360^\circ} \times 400 = 100$)
- قياس زاوية القطاع الدائرى الذى يُمثّل عدد الموظفين الذى أعمارهم من 50 سنة وأقل من 60 سنة تساوى 45°
  (لأن: $360^\circ - (90^\circ + 135^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$)

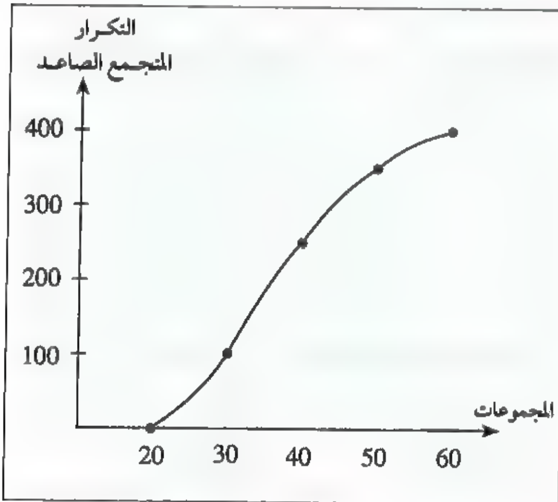
وبالتالى فإن عدد الموظفين الذين أعمارهم من 50 سنة وأقل من 60 سنة = 50 موظفًا
(لأن: $\frac{45^\circ}{360^\circ} \times 400 = 50$)

الجدول التكرارى ذى المجموعات

الفترات	التكـرار
20 –	100
30 –	150
40 –	100
50 –	50

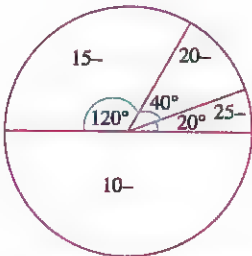
- الجدول التكرارى المتجمع الصاعد.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 20	0
أقل من 30	100
أقل من 40	250
أقل من 50	350
أقل من 60	400



سؤال 3

يُوضّح مخطط القطاعات الدائرية المقابل:

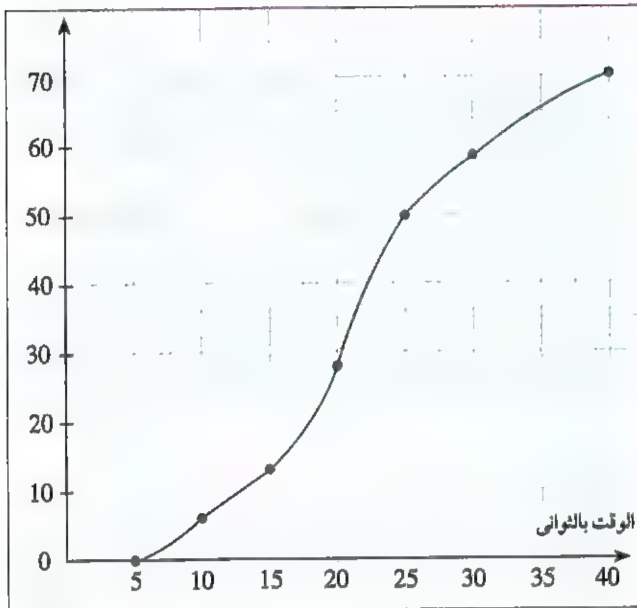


عدد الموظفين بأحد المصانع حسب رواتبهم بالألف جنيه (10 – , 15 – , ...)
فإذا كان العدد الكلى للموظفين 360 موظفًا فكوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثّله بيانيًّا.

▶ أسئلة الكتاب المدرسى

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المُعطاة:

1 الشكل المقابل يُمثل المنحنى المتجمع الصاعد للوقت المستغرق لعبور عدد من السيارات لجسر ما بالثوانى:



أولًا: ما إجمالى عدد السيارات فى التمثيل البيانى؟ .....

(أ) 40 (ب) 50

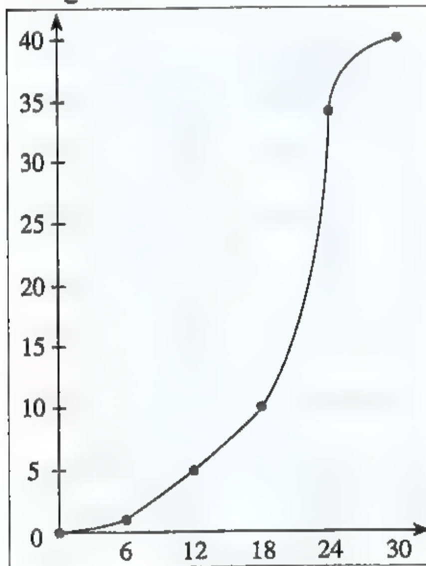
(جـ) 60 (د) 70

ثانيًا: ما عدد السيارات المارة على الجسر والتى قطعته فى أقل من 25 ثانية؟ ....

(أ) 15 (ب) 55

(جـ) 50 (د) 30

2 الشكل المقابل يُمثل المنحنى المتجمع الصاعد لدرجات طلاب فصل مكون من 40 طالبًا فى أحد الامتحانات:



أولًا: ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 12 درجة؟ ....

(أ) 5 (ب) 10

(جـ) 20 (د) 40

ثانيًا: ما عدد الطلاب الذين حصلوا على 18 درجة فأكثر؟ ....

(أ) 20 (ب) 30

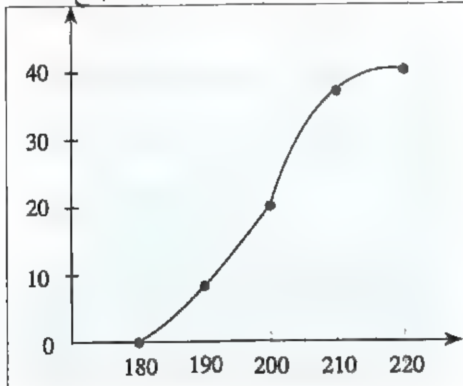
(جـ) 35 (د) 40

ثالثًا: ما النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا على أقل من 6 درجات؟ ....

(أ) 5% (ب) 10%

(جـ) 15% (د) 20%

3 فى الشكل المقابل: طلب من 40 طالبًا حل لغز بسيط، وسُجلت الأوقات التى استغرقوها فى الحل بالثوانى، وعرضت النتائج بيانيًا بالمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد:



ما عدد الطلاب الذين استغرقوا 3.5 دقيقة أو أكثر؟ ....

(أ) 30 (ب) 35

(جـ) 37 (د) 3

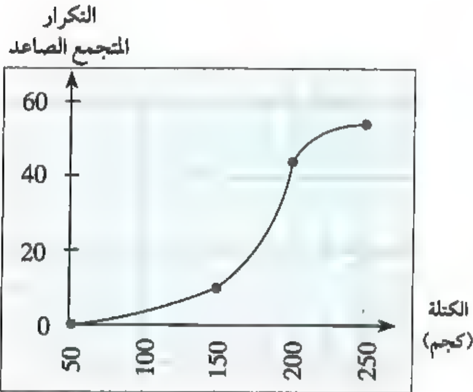
4 بالاستعانة بالجدول التكرارى الآتى:

القدرات	2-	6-	10-	14-	18-	22-	26-	المجموع
(التكرار)	k	6	7	11	8	k^2+1	1	40

قيمة k تساوى ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 6 (د) 7

5 الشكل المقابل يُمثل المنحنى المتجمع الصاعد لكتل قطيع من الخراف:



أولًا: ما عدد الخراف بالقطيع؟ ....

(أ) 50 (ب) 54

(جـ) 60 (د) 250

ثانيًا: ما عدد الخراف البالغ كتلتهم أقل من 150 كجم؟

(أ) 46 (ب) 35

(جـ) 10 (د) 44

ثالثًا: ما عدد الخراف البالغ كتلتهم 200 كجم أو أكثر؟

(أ) 35 (ب) 10

(جـ) 48 (د) 22

2 الجدول التالى يوضح التوزيع التكرارى لدرجات 50 طالبًا فى أحد الاختبارات:

الفترات (درجة)	2-	6-	10-	14-	18-	22-	26-
التكرار (عدد الطلاب)	3	5	9	10	12	7	4

كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثّله بيانيًا.

3 الجدول التالى يوضح التوزيع التكرارى للنسبة المئوية لدرجات 1000 طالبًا فى إحدى المواد:

الفترات (النسبة المئوية)	20-	30-	40-	50-	60-	70-	80-	90-
التكرار (عدد الطلاب)	30	70	160	260	150	130	110	90

1 كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثّله بيانيًا. 2 أوجد عدد الطلبة الحاصلين على أقل من 70%

3 أوجد عدد الطلبة الحاصلين على 80% فأكثر.

4 الجدول التالى يعرض نتائج 50 طالبًا فى اختبار مادة اللغة الإنجليزية:

درجة الاختبار	5-	10-	15-	20-	25-	30-	المجموع
التكرار (عدد الطلاب)	4	k	18	11	12	2	50

1 أوجد قيمة k . 2 ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

3 أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الناجحين إذا كانت النهاية الصغرى للاختبار هى 15 درجة.

5 الجدول التالى يوضح التوزيع التكرارى لكتل 52 طالبًا بالكيلوجرام:

الكتل (كجم)	40–	45–	50–	55–	60–	65–	70–
التكرار	3	2	7	18	18	3	1

1 كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا. 2 ما عدد الطلاب الذين كتلتهم أقل من 57 كجم؟

3 ما عدد الطلاب الذين كتلتهم أكبر من 61 كجم؟

4 إذا كان 20% من الطلاب كتلتهم أكبر من x كجم، فما قيمة x ؟

6 قام مدرب الجودو بأحد الأندية بوزن جميع لاعبى الجودو قبل إحدى البطولات، وكانت كتل مجموعة من 40 لاعبًا بالكيلو جرام على النحو التالى:

41	85	74	86	65	62	100	95	77	82
50	83	77	93	73	72	69	73	87	50
98	66	47	100	50	89	78	70	75	95
80	78	83	81	72	75	48	63	58	56

1 قم بتنظيم البيانات فى جدول تكرارى ذى مجموعات، مستخدمًا الفترات (41– ، 51– ، 61– ، ....).

2 كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثّله بيانيًّا.

7 مخطط الساق والأوراق المقابل يوضّح درجات طلّاب الصف الثانى الإعدادى فى مادة العلوم:

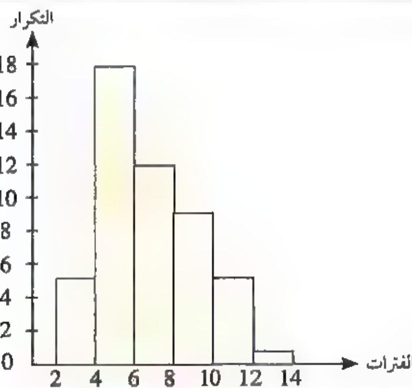
الساق	الأوراق
1	3 8
2	4 4 6 6 7 7 8 8 8 9
3	0 2 4 5 5 5 7 9 9
4	1 4 4 7 8
5	2 5

المفتاح 3 | 0 يعنى 30 درجة

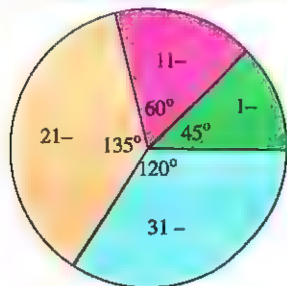
1 قم بتنظيم البيانات في جدول تكراري ذي مجموعات.

2 كوّن الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثّله بيانيًّا.

8 المدرّج التكرارى المقابل يوضّح كُتل 50 قطعة من أحد المنتجات المعروضة للبيع عبر الإنترنت. كوّن الجدول التكرارى ذى المجموعات، ثم الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثّله بيانيًا.



9 الربط بالحياة الاجتماعية: يوضّح مُخطط القطاعات الدائرية المقابل عدد أعضاء أحد الأندية من الأطفال والشباب حسب أعمارهم بالسنوات (1– ,11– , ...)، إذا كان العدد الكلّى لأعضاء النادى 7200 عضو. فكوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثّله بيانيًّا.



10 الجدول المقابل يُبين التوزيع التكــرارى المتجمع الصاعد للأجر اليومى بالجنيه لمجموعة من 100 عامــل:

1 ما عدد العُمال الذين أجرهم اليومى أقل من 200 جنيه؟

2 ما عدد العُمال الذين أجرهم اليومى 300 جنيه أو أكثر؟

3 كوِّن الجدول التكرارى ذى المجموعات.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 50	0
أقل من 100	10
أقل من 150	24
أقل من 200	48
أقل من 250	78
أقل من 300	90
أقل من 350	100

11 تسوق: تم عمل استبيان لعدد 40 شخصًا اشتروا أجهزة لوحية (تابلت). لمعرفة مقاس شاشة أجهزتهم بالبوصة يلخص الجدول التالى نتائج هذا الاستبيان:

المقاس (بوصة)	التكرار
7–	5
8–	6
9–	9
10–	16
11–	3
12–	1

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًّا، ثم أجب عما يلى:

1 كم عدد الأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية..؟

(ا) من 7 إلى أقل من 8 بوصات. (ب) أقل من 11 بوصة.

(جـ) 9 بوصات أو أكثر.

2 ما النسبة المئوية للأجهزة التى لها الأحجام التالية..؟

(ا) من 10 إلى أقل من 11 بوصة. (ب) أقل من 9 بوصات.



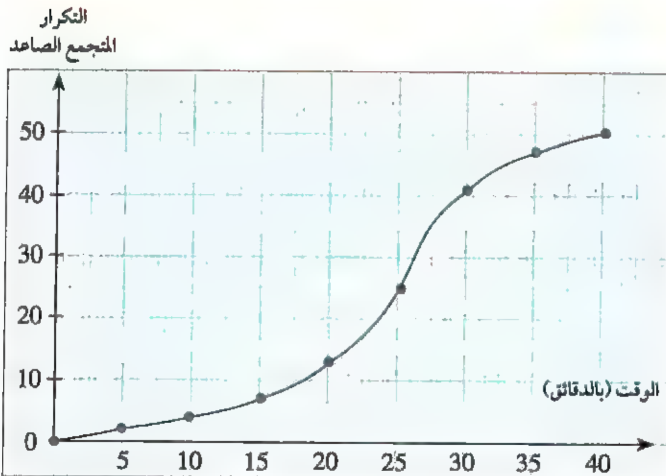
12 الشكل المقابل يمثل المنحنى المتجمع الصاعد للوقت الذى استغرقه 50 شخصًا للتسوق بداخل أحد المولات بالدقائق:

1 كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد باستخدام فترات متساوية :

0– , 5– , 10– , ...

2 ما عدد الأشخاص الذين قضوا من 25 دقيقة إلى أقل من 35 دقيقة فى التسوق؟

3 إذا كان 50% من الأشخاص استغرقوا وقتًا أقل من أو يُساوى t دقيقة فى التسوق، فأوجد قيمة t.



1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

الشكل المقابل يُمثل المنحنى المتجمع الصاعد لعدد 80 مكالمة هاتفية بالدقيقة:

التكرار المتجمع الصاعد

الوقت (بالدقائق)

1 ما عدد المكالمات التى مُدتها أقل من 10 دقائق؟ ....

(أ) 40	(ب) 80
(جـ) 50	(د) 66

2 ما عدد المكالمات التى مُدتها 15 دقيقة فأكثر؟ ....

(أ) 65	(ب) 70
(جـ) 15	(د) 30

3 ما النسبة المئوية للمكالمات التى مُدتها أقل من 5 دقائق؟ ....

(أ) 12.5% (ب) 10% (جـ) 90% (د) 87.5%

2 أجب عما يأتى:

1 الجدول التالى يوضح عدد ساعات المذاكرة يوميًا لعدد 50 طالبًا:

عدد ساعات المذاكرة	1–	2–	3–	4–	5–	6–	7–
التكرار (عدد الطلبة)	2	3	5	12	15	7	6

(أ) كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًا.

(ب) أوجد عدد الطلاب الذين يُذاكرون أقل من 4 ساعات يوميًا.

(جـ) أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين يُذاكرون 6 ساعات فأكثر يوميًا.

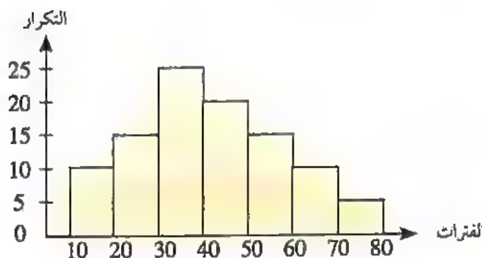
2 الجدول التالى يوضح درجات 50 طالبًا بالشهادة الإعدادية:

الدرجات	30–	40–	50–	60–	70–	80–	90–
التكرار (عدد الطلبة)	3	5	9	10	12	7	4

(أ) كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًا.

(ب) أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الناجحين (علمًا بأن النهاية الصغرى للنجاح 40 درجة).

3 من المدرج التكرارى المقابل كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثِّله بيانيًا.



ذاكر الدرس 2

مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات
(Measurements of Central Tendency of the Frequency Table with intervals)



 نواتج التعلم

- يقدِّر الطالب الوسط الحسابى للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- يقدِّر الطالب الوسيط للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- يقدِّر الطالب المنوال للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- يقرأ ويفسِّر الطالب جداول وأشكالًا بيانية تكرارية لمجتمع ما.

مفردات أساسية

- الوسط الحسابى $(\bar{x})$ **Mean**
- الوسيط (Q_2) **Median (Second quartile)**
- المنوال **Mode**

 فكر وناقش

- الجدول التالى يبين أطوال الطلاب فى أحد الفصول كالتالى:

الطول (سم)	140 –	145 –	150 –	155 –	160 –
عدد الطلاب	5	9	15	12	4

- هل يمكنك تقدير متوسط أطوال الطلاب؟

فى هذا الدرس سوف نتعلم كيفية إيجاد مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال) لجدول تكرارى ذى مجموعات، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم 1 الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكنك تقدير الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات،
باستخدام الصيغة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابى } (\bar{x}) = \frac{\sum (f\cdot x_m)}{\sum f}$$

- حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات.
- x_m هى مركز المجموعة وتساوى $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى لها}}{2}$
- $\sum (f\cdot x_m)$ هى مجموع حواصل ضرب مركز كل مجموعة x_m فى التكرار المناظر لها f.

تذكر أن

مقاييس النزعة المركزية هى القيم التى تصف مركز تجمع مجموعة من البيانات، مثل: الوسط الحسابى، الوسيط، المنوال.
حيث:
- الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$
- الوسيط: هو القيمة التى تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.
- المنوال: هو القيمة الأكثر شيوعًا (تكرارًا).

مثال 1 يُوضّح الجدول درجات 50 طالبًا فى أحد الاختبارات:

الفترات (الدرجة)	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –
التكرار (عدد الطلاب)	8	12	14	9	7

قدِّر الوسط الحسابى لدرجات الطلاب.

الحل

نحدد: مراكز المجموعات تبعًا للقانون = $\frac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{2}$

لاحظ أن

أطوال المجموعات متساوية، طول كل مجموعة = 10

- مركز المجموعة الأولى: $\frac{10+20}{2} = 15$
- مركز المجموعة الثانية: $\frac{20+30}{2} = 25$
- مركز المجموعة الثالثة: $\frac{30+40}{2} = 35$
- مركز المجموعة الرابعة: $\frac{40+50}{2} = 45$
- مركز المجموعة الخامسة: $\frac{50+60}{2} = 55$

ثم نُكوِّن الجدول المقابل:

المجموعات (الفترات)	التكرار (f)	مراكز المجموعات (x_m)	$f\cdot x_m$
10 –	8	15	120
20 –	12	25	300
30 –	14	35	490
40 –	9	45	405
50 –	7	55	385
المجموع	**50**		**1700**

$$\bar{x} = \frac{\sum (f\cdot x_m)}{\sum f} = \frac{1700}{50} = 34$$

∴ الوسط الحسابى لدرجات الطلاب = 34 درجة.

مثـال 2 الجدول التكرارى التالى يوضّح درجات الحرارة فى 50 منطقة من دول العالم فى يوم ما:

المجموعات	5 –	15 –	25 –	x –	45 –	المجموع
التكـرار	7	k	12	13	8	50

1 أوجـد قيمـة x، k.

2 قدِّر الوسط الحسابى لدرجـات الحرارة.

الحـل

1 ∵ طول كل مجموعة = 10

$\therefore x = 35$

∵ مجمـوع التكـرارات = 50

$\therefore 7 + k + 12 + 13 + 8 = 50$

$\therefore 40 + k = 50$

$\therefore k = 50 - 40 = 10$

2

المجموعات	التكـرار (f)	مراكز المجموعات (x_m)	$f \cdot x_m$
5 –	7	10	70
15 –	10	20	200
25 –	12	30	360
35 –	13	40	520
45 –	8	50	400
المجموع	**50**		**1550**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(f \cdot x_m)}{\Sigma f} = \frac{1550}{50} = 31$$

∴ الوسط الحسابى لدرجات الحرارة هو 31 درجة.

مثـال 3 سُجلت أعداد المرضـى المترددين على إحدى العيـادات فى أحدى المستشفـيات خـلال عـدد من الأيـام فكانـت كـما فى الجـدول التالى:

عـدد المرضـى	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –	60 –
التكـرار	16	15	m	10	3	2

إذا كان متوسط عدد المرضى خلال هذه الأيام 30 مريضًا؛ فأوجد قيمة m.

الحـل

الفترات	التكرار (f)	مركز الفترات (x_m)	$f \cdot x_m$
10 –	16	15	240
20 –	15	25	375
30 –	m	35	35m
40 –	10	45	450
50 –	3	55	165
60 –	2	65	130
المجموع	**46 + m**		**1360 + 35m**

$\because \bar{x} = \frac{\Sigma(f \cdot x_m)}{\Sigma f}$

$\therefore \frac{1360 + 35m}{46 + m} = 30$

$\therefore 1360 + 35m = 30\,(46 + m)$

$\therefore 1360 + 35m = 1380 + 30m$

$\therefore 35m - 30m = 1380 - 1360$

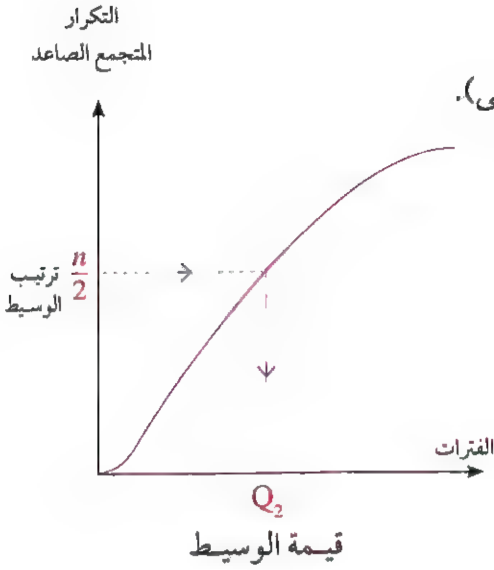
$\therefore 5m = 20 \qquad \therefore m = 4$

تعلم 2 الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكن تقدير الوسيط من المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد كالآتى:

1 نعيِّن ترتيب الوسيط = $\frac{n}{2}$ (حيث n مجموع التكرارات على المحور الرأسى).

2 نعيِّن النقطة التى تمثِّل ترتيب الوسيط على المحور الرأسى، ونرسم منها خطًّا أفقيًّا يقطع المنحنى المتجمع الصاعد فى نقطة، فيكون مسقط هذه النقطة على المحور الأفقى هو قيمة الوسيط (Q_2)



مثال 4

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات 60 طالبًا فى اختبار مادة الرياضيات.

الدرجات	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	30 –	35 –	المجموع
التكرار	2	5	14	20	k	5	1	**60**

أوجد قيمة k ثم ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

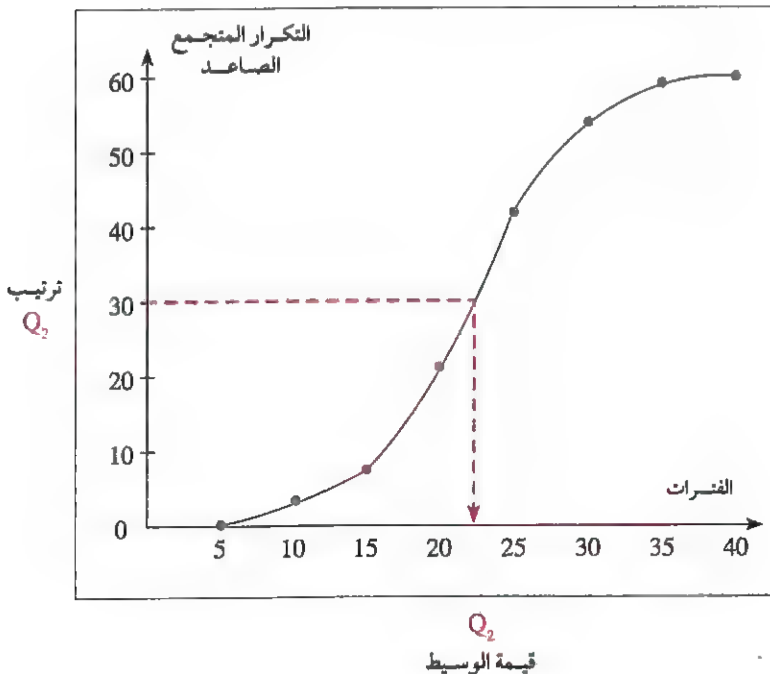
الحل

∵ مجموع التكرارات = 60

$\therefore 2 + 5 + 14 + 20 + k + 5 + 1 = 60$

$\therefore k + 47 = 60$ $\qquad$ $\therefore k = 60 - 47 = 13$

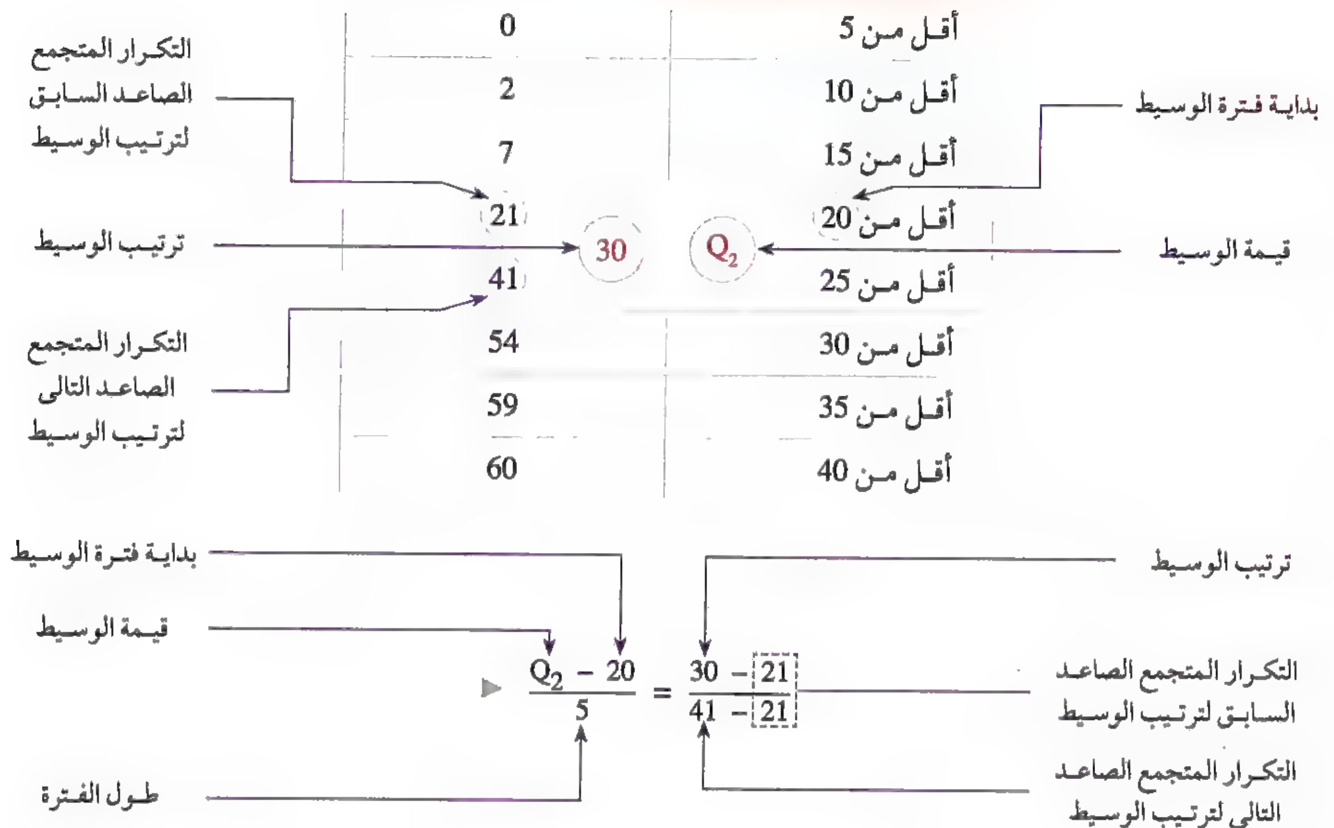
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 5	0
أقل من 10	2
أقل من 15	7
أقل من 20	21
أقل من 25	41
أقل من 30	54
أقل من 35	59
أقل من 40	60



ترتيب الوسيط = $\frac{60}{2} = 30$

الوسيط $Q_2 \simeq 22$

- يمكنك إيجاد قيمة الوسيط (Q_2) من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد حسابيًا كالآتى: (فى المثال السابق)
- ترتيب الوسيط = $\frac{60}{2} = 30$



$$\frac{Q_2 - 20}{5} = \frac{30 - 21}{41 - 21}$$

$\therefore \frac{Q_2 - 20}{5} = \frac{9}{20}$

$\therefore Q_2 - 20 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} = 2.25$

$\therefore Q_2 = 2.25 + 20 = 22.25$

$\therefore Q_2 \approxeq 22$

مثـال 5 من الجدول التكرارى التالى، قدِّر قيمة الوسيط:

الفترات	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –	المجموع
التكرار	3	4	6	5	2	20

الحـل

ترتيب الوسيط = $\frac{20}{2} = 10$

(الجدول التكرارى المتجمع الصاعد)

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 10	0
أقل من 20	3
أقل من 30	7
أقل من 40	13
أقل من 50	18
أقل من 60	20

(ترتيب الوسيط ← بين 7 و 13)

$\therefore \frac{Q_2 - 30}{10} = \frac{10 - 7}{13 - 7}$

$\therefore \frac{Q_2 - 30}{10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore Q_2 - 30 = \frac{10}{2}$

$\therefore Q_2 - 30 = 5$

$\therefore Q_2 = 5 + 30 = 35$



مثـال 6

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى ذا المجموعات لدرجات 25 طالبًا فى اختبار مـادة مـا:

الدرجـات	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –	المجمـوع
التكـرار	3	7	8	5	2	**25**

1 كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد لهذه الدرجات وقدِّر منه قيمة الوسيط حسابيًّا.

2 ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع وتحقق من قيمة الوسيط التى حصلت عليها بيانيًّا.

الحـل

1 الجدول التكرارى المتجمع الصاعد.

الحـدود العلـيا للمجموعـات	التكـرار المتجــمع الصـاعــد
أقل من 10	0
أقل من 20	3
أقل من 30	10
أقل من 40	18
أقل من 50	23
أقل من 60	25

ترتيب الوسيط ←

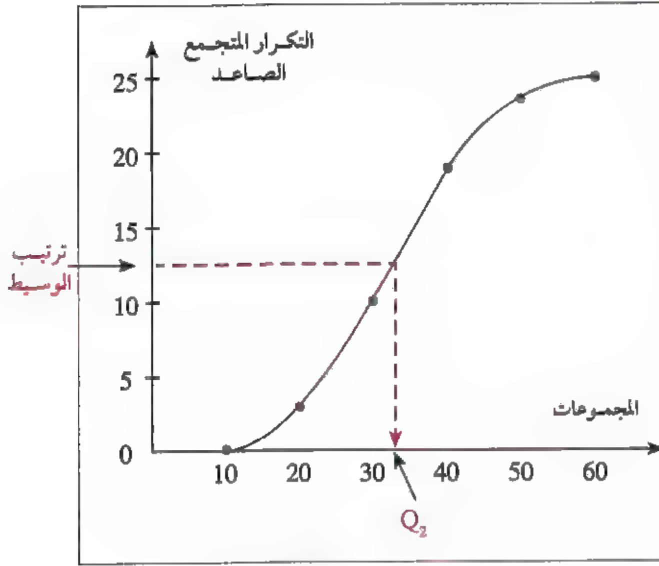
إيجاد قيمة الوسيط حسابيًا من الجدول:

$$\frac{Q_2 - 30}{10} = \frac{12.5 - 10}{18 - 10} = \frac{5}{16}$$

$$Q_2 - 30 = 3.125$$

$$\therefore Q_2 = 33.125$$

2 المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.



ترتيـب الوسـيط من الرسم = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$

$$\frac{25}{2} = 12.5$$

∴ الوسـيط $Q_2 \simeq 33$

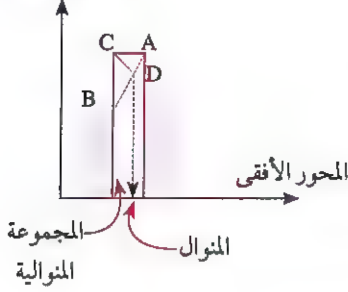
سؤال 1

من الجدول التكرارى ذى المجموعات التالى:

المجموعات	10 –	20 –	k –	40 –	50 –	60 –	المجموع
التكرار	10	17	20	32	$x+2$	4	**100**

أوجد قيمة كل من: k ، x ثم قدِّر قيمة الوسيط بيانيًّا وحسابيًا.

تعلم 3 المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

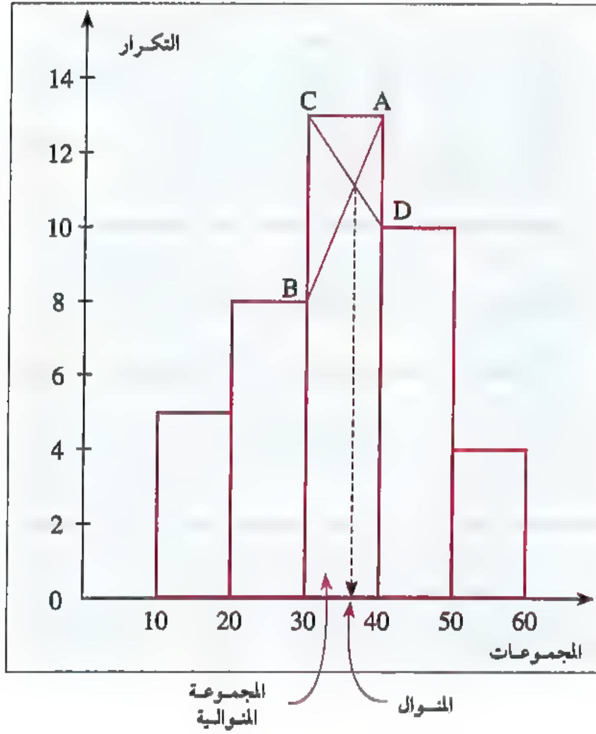


- يمكنك تقدير المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات عن طريق رسم المدرج التكرارى وتحديد المجموعة الأكثر تكرارًا، وتسمى المجموعة المنوالية، ثم تحديد مسقط نقطة تقاطع $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ على المحور الأفقى، وتكون هى القيمة المنوالية.

مثال 7 ارسم المدرج التكرارى للتوزيع التكرارى التالى، وقدِّر قيمة المنوال والمجموعة المنوالية:

المجموعات	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –
التكرار	5	8	13	10	4

الحل



1 ارسم محورين متعامدين أحدهما أفقى يمثل المجموعات، والآخر رأسى يمثل التكرار، ثم نقسِّم المحورين بمقياس رسم مناسب (لتمثيل المجموعات - والتكرار).

2 ● ارسم مستطيلًا قاعدته هى المجموعة الأولى (10 –) وارتفاعه يساوى التكرار 5

● ارسم مستطيلًا ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هى المجموعة الثانية (20 –) وارتفاعه يساوى التكرار (8)

● كرِّر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (50 –)

3 حدِّد المجموعة الأكثر تكرارًا (أعلاها ارتفاعًا فى الرسم) وتسمَّى المجموعة المنوالية، ثم نحدِّد مسقط نقطة تقاطع $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ على المحور الأفقى، وتكون هى القيمة المنوالية.

المجموعة المنوالية (الفترة المنوالية) هى 30 –

∴ قيمة المنوال ≃ 36

سؤال 2

من التوزيع التكرارى التالى، حدِّد الفترة المنوالية، ثم أوجد القيمة المنوالية:

المجموعات	2 –	4 –	6 –	8 –	10 –	المجموع
التكرار	3	10	12	10	5	40

الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الوسط الحسابى للأعداد: 2 , 8 , 13 , 7 , 5 هو ....

(أ) 5 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 6

2 إذا كان الوسط الحسابى 3 , 6 , 5 , x , 8 هو 6 فإن: .... = x

(أ) 30 (ب) 8 (جـ) 5 (د) 4

3 إذا كان الوسط الحسابى للقيم $x - 6$, $x + 6$, x هو 15 فإن: .... = x

(أ) 15 (ب) 5 (جـ) 8 (د) 2

4 إذا كان الوسط الحسابى لدرجات خمسة امتحانات هو 80 درجة فإن مجموع الدرجات = ...

(أ) 400 (ب) 500 (جـ) 16 (د) 200

5 إذا كان: $\sum f = 50$ ، $\sum f . x_m = 800$ فإن الوسط الحسابى $\bar{x}$ = ...

(أ) 16 (ب) 160 (جـ) 750 (د) 850

6 إذا كان: $\sum f = 50$ ، $\sum f . x_m = 1400$ فإن الوسط الحسابى $\bar{x}$ = ...

(أ) 280 (ب) 20 (جـ) 28 (د) 208

7 إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو 25 والحد الأعلى 45 فإن مركزها = ...

(أ) 25 (ب) 45 (جـ) 70 (د) 35

8 إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو 4 ومركزها 9 فإن حدها الأعلى = ...

(أ) 15 (ب) 14 (جـ) 18 (د) 22

9 إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو 10 والحد الأعلى هو x ومركزها 15 فإن .... = x

(أ) 10 (ب) 15 (جـ) 20 (د) 30

10 إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو 4 ومركزها 6 فإن طولها يساوى ....

(أ) 4 (ب) 8 (جـ) 16 (د) 12

11 إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 18 ومركزها هو 15.5، فما الحد الأدنى لهذه المجموعة؟

(أ) 12 (ب) 12.5 (جـ) 13 (د) 13.5

12 يوضِّح الجدول التكرارى الآتى درجات 150 طالبًا فى مادة الرياضيات:

الدرجات	– 4	– 12	– 20	– 28	– 36	– 44	– 52	المجموع
التكرار	15	3k	4k	32	25	22	14	150

ما قيمة k؟

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

2 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	– 2	– 4	– 6	– 8	– 10	المجموع
التكـرار	1	5	7	4	3	20

3 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	– 5	– 15	– 25	– 35	– 45	المجموع
التكـرار	4	5	6	3	2	20

4 يبين الجدول التالى متوسط إنفاق الطالب اليومى داخل مدرسة لعدد خمسين طالبًا فى الصف الثانى الإعدادى:

الإنفاق (بالجنيه)	– 0	– 10	– 20	– 30	– 40	– 50
التكـرار	7	12	15	9	5	2

قدِّر الوسط الحسابى للإنفاق اليومى.

5 فيما يلى التوزيع التكرارى لكتل 30 طفلًا بالكيلوجرامات:

الوزن بالكيلوجرام	– 6	– 10	– 14	– 18	– 22	– 26	– 30	المجموع
التكـرار	2	3	k	8	6	4	2	30

1 أوجد قيمة k

2 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى.

6 إذا كان الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى هو 31 فأوجد قيمة k:

المجمـوعـات	– 5	– 15	– 25	– 35	– 45
التكـرار	7	10	k	13	8

الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات:

7 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الوسيط لمجموعة القيم 7 , 8 , 12 , 9 , 17 هو ....

(أ) 12 (ب) 9 (جـ) 7 (د) 8

2 إذا كان الوسيط للقيم x , $x+3$, $x+2$, $x+4$, $x+1$ هو 18 فإن .... = x

(أ) 14 (ب) 18 (جـ) 16 (د) 2

3 إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم = ...

(أ) 8 (ب) 9 (جـ) 6 (د) 7

4 إذا كان ترتيب الوسيط لتوزيع تكرارى هو 30 فإن مجموع التكرارات = ...

(أ) 50 (ب) 60 (جـ) 15 (د) 40

5 إذا كان ترتيب الوسيط لتوزيع تكرارى هو 12 فإن مجموع التكرارات = ...

(أ) 6 (ب) 36 (جـ) 12 (د) 24

8 الجدول الآتى يوضِّح درجات الحرارة خلال 100 يوم:

درجات الحرارة	0 –	5 –	10 –	15 –	20 –	المجموع
التكرار	8	15	42	25	10	100

قدِّر الوسيط بيانيًّا.

9 يوضِّح الجدول التالى كتل 40 شخصًا (بالكيلو جرام) لكى ينضموا إلى أحد برامج إنقاص الوزن:

الفترات	70 –	80 –	90 –	100 –	110 –	120 –	130 –
التكرار	2	5	9	12	7	3	2

قدِّر الوسيط بيانيًّا.

10 يبين الجدول الآتى التوزيع التكرارى لدرجات 40 طالبًا فى أحد الاختبارات:

المجموعات	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	المجموع
التكرار	k	10	3k	8	k + 2	40

أوجد قيمة k، ثم قدِّر قيمة الوسيط.

المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

11 اختر الإجابة الصحيحة:

1 المنوال للقيم 5 , 2 , 9 , 6 , 2 هو ....

(أ) 5 (ب) 2 (جـ) 6 (د) 9

2 إذا كان المنوال للقيم 3 , 4 , 5 , $x+4$ هو 5 فإن: $x=$ ....

(أ) 4 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 1

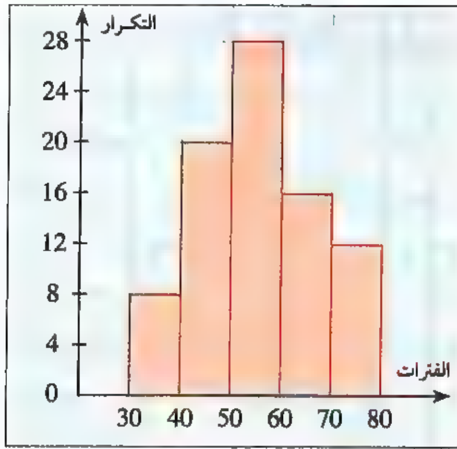
3 إذا كان المنوال للقيم 7 , 5 , $\frac{k+3}{2}$, 7 , 5 , 3 هو 5 فإن: k = ...

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 7 (د) 5

4 من المدرج التكرارى المقابل، ما الفترة المنوالية؟

(أ) 30 – (ب) 40 –

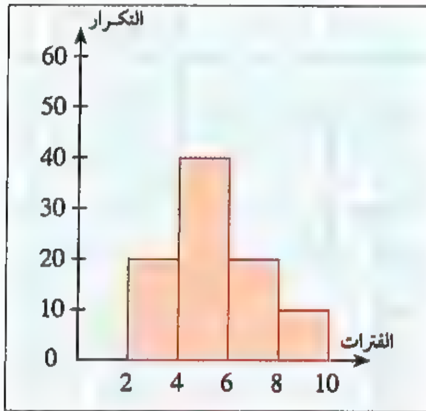
(جـ) 50 – (د) 70 –



5 فى الشكل المقابل، قيمة المنوال تساوى .... تقريبًا.

(أ) 4 (ب) 5

(جـ) 6 (د) 40



12 أوجد المنوال للتوزيع التكرارى الآتى بيانيًّا:

الفترات	0 –	2 –	4 –	6 –	8 –	المجموع
التكرار	2	5	8	7	2	24

13 الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لكتل 100 طفل بالكيلوجرام:

الوزن (بالكجم)	10 –	14 –	18 –	22 –	26 –	30 –	المجموع
التكرار	5	15	30	24	17	9	100

أوجد الوزن المنوالى.



14 يقوم مصنع بإنتاج نوعين مختلفين من البطاريات A ، B ، وتم اختيار خمسين بطارية من كل نوع عشوائيًّا واختبارها بنفس الطريقة، ثم سجلت مدة العمر الافتراضى لكل بطارية بالساعة، كما فى الجدول التالى، **قدِّر الوسيط لمدة العمر الافتراضى لكل نوع وقارن بينهما.**

المدة (ساعة)	0 –	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	30 –
التكرار النوع (A)	3	5	8	10	12	7	5
التكرار النوع (B)	1	2	10	20	9	4	4

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو 10 والحد الأعلى هو x ومركزها 15 فإن .... = x

(أ) 20 (ب) 10 (جـ) 30 (د) 2

2 الوسيط لمجموعة القيم 34 , 23 , 25 , 40 , 22 , 4 هو ....

(أ) 22 (ب) 23 (جـ) 24 (د) 25

3 إذا كان الوسط الحسابى للقيم 27 , 8 , 16 , 24 , 6 , k هو 14 فإن: .... = k

(أ) 3 (ب) 6 (جـ) 27 (د) 84

4 إذا كان لمجموعة من البيانات $\sum f = 10$ ، $\sum f.x_m = 80$ فإن : .... = $\bar{x}$

(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) 10 (جـ) 80 (د) 8

5 إذا كان لمجموعة من البيانات: $\sum f.x_m = 2800$ ، $\bar{x} = 70$ فإن : .... = $\sum f$

(أ) 40 (ب) 280 (جـ) 28 (د) 480

6 إذا كان المنوال للقيم 6 , 9 , 12 , x - 1 هو 9 فإن قيمة x تساوى ....

(أ) 7 (ب) 8 (جـ) 9 (د) 10

7 إذا كان لمجموعة من البيانات $\sum f = 17$ ، $\bar{x} = 5$ فإن قيمة .... = $\sum f.x_m$

(أ) 200 (ب) 150 (جـ) 120 (د) 85

8 مركز المجموعة الثانية فى المجموعات: – 5 ، – 15 ، – 25 ، – 35 هو ....

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

9 إذا كان الوسط الحسابى لستة قيم هو 15 فإن مجموع القيم = ...

(أ) 21 (ب) 90 (جـ) 45 (د) 42

2 أجب عما يأتى:

1 الجدول الآتى يوضح توزيعًا تكراريًا لكتل الأطفال بالكيلو جرام:

الفترات	– 5	– 15	– 25	– 35	– 45	المجموع
التكرار	3	4	7	4	2	20

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

2 إذا كان الوسط الحسابى للقيم $x+2$, $x+1$, x هو 5 فاحسب قيمة x

3 إذا كان الوسيط للقيم b + 1 , b + 3 , b – 1 ، b – 2 , b + 2 هو 10 فاحسب قيمة b

4 من الجدول الآتى:

المجموعات	2 –	6 –	10 –	14 –	18 –	المجموع
التكرار	4	5	1	k – 2	7	20

(1) أوجد قيمة k (2) أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع التكرارى.

5 من الجدول الآتى:

عدد التلاميذ	5 –	15 –	25 –	35 –	45 –	55 –
التكرار	4	5	k	3	2	4

إذا كان الوسط الحسابى لهذا التوزيع هو 33 فأوجد قيمة k

6 من الجدول التكرارى التالى:

درجات الحرارة	3 –	6 –	9 –	12 –	15 –	18 –	المجموع
التكرار	3	6	8	7	5	1	30

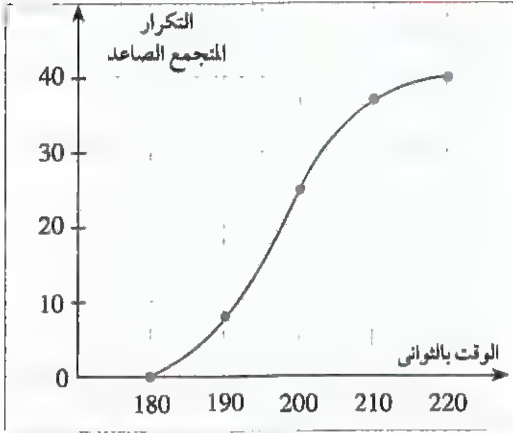
ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

7 من الجدول التكرارى التالى:

المجموعات	110 –	115 –	120 –	125 –	130 –	135 –	140 –	المجموع
عدد التلاميذ	10	12	28	35	60	40	15	200

ارسم المدرج التكرارى لهذا التوزيع، ومنه قدِّر المنوال.

1 اختر الإجابة الصحيحة:



1 طُلب من 40 طالبًا حل لغز بسيط، وسجلت الأوقات التى استغرقوها فى الحل بالثوانى، وعرضت النتائج بيانيًّا بالمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد المقابل:

ما عدد الطلاب الذين استغرقوا 3.5 دقيقة أو أكثر؟

(أ) 30 (ب) 35

(جـ) 37 (د) 3

2 من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل، ما قيمة الوسيط؟ ....

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 142	0
أقل من 148	4
أقل من 154	12
أقل من 160	32
أقل من 166	44
أقل من 172	50

(أ) 154.9 (ب) 155.9

(جـ) 157.9 (د) 160.9

3 إذا كان الوسط الحسابى $(\overline{x})$ لجدول تكرارى هو 24.5 وكان $\sum f . x_m = 980$ فما قيمة $\sum f$؟

(أ) 40 (ب) 50 (جـ) 60 (د) 70

4 ما مركز المجموعة الثالثة فى المجموعات ◄ 6 – ، 10 – ، 14 – ، 18 – ، ....؟

(أ) 12 (ب) 14 (جـ) 16 (د) 18

2 أكمل كلًّا مما يأتى بالإجابة الصحيحة بالاستعانة بالجدول التكرارى التالى:

الفترات	2 –	6 –	10 –	14 –	18 –	22 –	26 –	المجموع
التكرار	k	6	7	11	8	$k^2 + 1$	1	40

1 قيمة k = ... 2 الوسط الحسابى = ...

3 ترتيب الوسيط = ... 4 الوسيط = ...

3 إذا كان الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى هو 36.6 ، فأوجد قيمة كلٍّ من k ، x

الدرجات	– 10	– 20	– 30	– x	– 50
التكرار	12	20	k	30	15

4 الجدول التالى يوضح كتل 50 طالبًا بالكيلوجرام بإحدى المدارس، ارسم المدرج التكرارى وأوجد الكتلة المنوالية.

الكتل (كجم)	– 30	– 35	– 40	– 45	– 50	– 55	– 60
التكرار	6	10	12	8	6	5	3

5 من الجدول التكرارى التالى:

الفترات	– 2	– 6	– 10	– 14	– 18	– 22	– 26	المجموع
التكرار	4	6	11	k	14	8	5	60

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثِّله بيانيًّا، ومن الرسم قدِّر قيمة الوسيط.

6 من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل،
كوِّن الجدول التكرارى ذا المجموعات، ثم أوجد الفترة المنوالية.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 10	0
أقل من 15	3
أقل من 20	9
أقل من 25	16
أقل من 30	24
أقل من 35	33
أقل من 40	44
أقل من 45	50

معلومات إثرائية وأنشطة الوحدات





معلومة إثرائية (1)

ليست كل الأعداد غير النسبية هى فقط جذورًا غير جذرية إنما توجد هناك أعداد غير نسبية أخرى مثل:

العدد π حيث: .... $\pi \approx 3.141592654$

وهو يساوى النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

النسبة الذهبية φ حيث: .... $\varphi \approx 1.618033989$

وهى نسبة مميزة ترتبط بجمال وتناسق التصميمات.

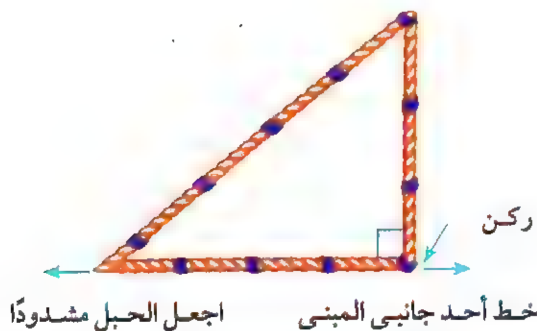


معلومة إثرائية (2)

استخدم المصريون القدماء حبلًا موصولًا ذى 12 عقدة بينها مسافات متساوية لتشكيل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه 3:4:5 يحتوى هذا المثلث على زاوية قائمة بين ضلعين طولاهما 3 ، 4 وحدات.

استخدم المصريون هذا الإجراء لبناء زواياهم القائمة







معلومة إثرائية (3)

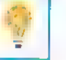
ثلاثيات فيثاغورث:

هى ثلاثة أعداد تحقق الصيغة الرياضية: $a^2 + b^2 = c^2$ حيث c العدد الأكبر، وفيما يلى ثلاثيات فيثاغورث الشائعة:

1 أى ثلاثة أعداد على الصورة: k ، $\frac{k^2-1}{2}$ ، $\frac{k^2+1}{2}$
حيث k عدد فردى أكبر من الواحد الصحيح.
مثل: (3 ,4 ,5) ، (5 ,12 ,13) ، (7 ,24 ,25) ، (9 ,40 ,41) وهكذا....

2 أى ثلاثة أعداد على الصورة: $2k$ ، $k^2 - 1$ ، $k^2 + 1$ حيث: $K > 1$
مثل: (8 ,15 ,17) ، (10 ,24 ,26) ، (12 ,35 ,37) وهكذا....

3 أى ثلاثة أعداد على الصورة: $2k(k+1)+1$ ، $2k(k+1)$ ، $2k+1$ حيث: $K > 0$
مثل: (2 ,1.5 ,2.5) ، (5 ,12 ,13) ، (7 ,24 ,25) وهكذا....



معلومة إثرائية (4)

- لاحظ النمط التالى لاستنتاج عدد أقطار أى مضلع محدب:

اسم الشكل	عدد الأضلاع	عدد الأقطار	الفرق
المثلث	3	0	
			2
الرباعى	4	2	
			3
الخماسى	5	5	
			4
السداسى	6	9	
			☐
السباعى	7	☐	
			☐
الثمانى	8	☐	

نستنتج من النمط أن:

عدد أقطار الرباعى = 2

عدد أقطار الخماسى = 2 + 3

عدد أقطار السداسى = 2 + 3 + 4

عدد أقطار السباعى = 2 + 3 + 4 + 5

عدد أقطار الثمانى = 2 + 3 + 4 + 5 + 6

عدد أقطار مضلع محدب عدد أضلاعه n = $(n-2) + (n-3) + (n-4) + \ldots\ldots\ldots + 2$

حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوى 4

نشاط الوحدة الأولى 1 المثلث الذهبى

- الهدف من النشاط:

تعرف نماذج وأشكالاً جديدة كأمثلة فى الرياضيات على النسبة الذهبية.

- خطوات التنفيذ:

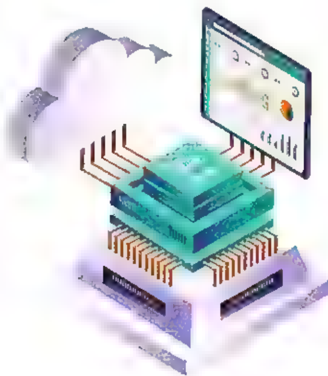
بالتعاون مع أحد أصدقائك حاول القيام بالآتى:

1 استخدم أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى للبحث عن أمثلة فى الرياضيات على النسبة الذهبية.

2 اذكر عددًا من الأشكال التى يمكن أن توجد بها النسبة الذهبية.

3 هل يمكن أن توجد النسبة الذهبية فى المثلث؟
اجمع بيانات عن هذه الحالة، واذكر نوع المثلث الذى يمكن أن يُطلق عليه (المثلث الذهبى).

4 وضح خطوات الإجابة عن الأسئلة السابقة، مع عرض بعض الصور للأشكال التى توصلت إليها.



نشاط الوحدة الثانية 2 النشأة التاريخية لتحليل المقادير الجبرية



- الهدف من النشاط:

تقدير دور العلماء المسلمين فى تطوير علم الجبر والمقادير الجبرية.

- خطوات التنفيذ:

بالتعاون مع أحد أصدقائك حاول القيام بالآتى:

1 استخدم أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى للوصول إلى اسم أحد العلماء المسلمين الذين أسهموا فى تطوير علم الجبر.
2 اكتب دور هذا العالم فى موضوع تحليل المقادير الجبرية.
3 هل توجد اختلافات بين طريقة تحليل المقادير الجبرية قديمًا وحديثًا؟

نشاط الوحدة الثالثة 3 نظرية فيثاغورث



- الهدف من النشاط:

إثبات صحة نظرية فيثاغورث علميًّا.

- خطوات التنفيذ:

يتاح عبر موقع Youtube العديد من مقاطع الفيديو التى تثبت صحة نظرية فيثاغورث بطريقة عملية، تعاون مع اثنين من أصدقائك، وحاول القيام بالآتى:

1 ابحث عن الطرق العملية المختلفة لإثبات صحة نظرية فيثاغورث.
2 اختر طريقتين فقط وقارن بينهما من حيث (الأسلوب المتبع - الخامات المستخدمة - مستوى الدقة) أو أى عناصر أخرى للمقارنة يحددها الفريق.
3 اختر إحدى هاتين الطريقتين (الطريقة الأبسط) وحاول تنفيذها بالتعاون مع أقرانك.

نشاط الوحدة الرابعة 4 مقاييس النزعة المركزية



- الهدف من النشاط:

تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات من بيانات واقعية وحساب مقاييس النزعة المركزية لها.

- خطوات التنفيذ:

تعاون مع اثنين من زملائك في الفصل وحاول القيام بالآتي:

1 اختر أحد المواقف الحياتية التى تمر بها فى (النادى - إحدى الحدائق - السوق - فناء المدرسة)، وقم بجمع عدد من البيانات عن هذا الموقف.
2 نظم تلك البيانات فى جدول تكرارى فى مجموعات.
3 احسب مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال) من هذا الجدول، مع رسم الأشكال البيانية اللازمة للوسيط والمنوال.

المراجعة النهائية
والامتحانات



ملخص عام على الوحدات

الوحدة الأولى الأعداد والعمليات عليها

الأعداد الحقيقية (Real Numbers)

الأعداد غير النسبية

العدد غير النسبي هو العدد الذى لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a , b عددان صحيحان ، $b \neq 0$ ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز $Q`$

أمثلة للأعداد غير النسبية:

1. الجـذور التربيعـية للأعداد التي ليست مربعات كاملة مثل: $\sqrt{3}$
2. الجـذور التكعيبـية للأعداد التي ليست مكعبات كاملة مثل: $\sqrt[3]{-16}$
3. النسبة التقريبية π وهى النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.
4. النسـبة الذهبيـة φ

الأعداد الحقيقية

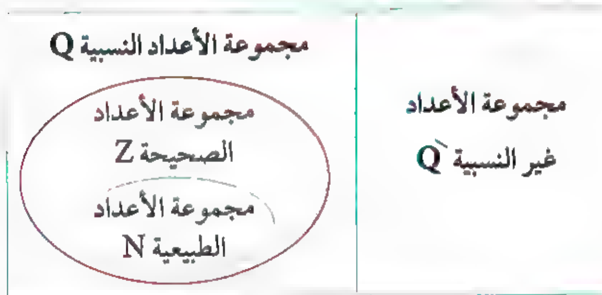
مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة التى تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية Q ومجموعة الأعداد غير النسبية $Q`$ ويرمز لها بالرمز R

أى أن $R = Q \cup Q`$ حيـث $Q \cap Q` = \varnothing$

شكل فن المقابل يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد حيث: $N \subset Z \subset Q \subset R$

$Q` \subset R$

مجموعة الأعداد الحقيقية R



الفترات والعمليات عليها (Intervals and Their Operations)

الفترة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وأى عددين حقيقيين ينحصر بينهما عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية، وعند كتابة الفترة نبدأ بالعدد **الأصغر** (a) وننتهى بالعدد **الأكبر** (b).

وتنقسم الفترات إلى: فترات محـدودة وفترات غير محـدودة.

أولا الفترات المحدودة

إذا كان a و b عددين حقيقيين ، $a < b$ فـإن:

	التعبير الرياضي	التعبير بالصفة المميزة	التمثيل على خط الأعداد
الفترة المغلقـة: $[a , b]$	$[a , b]$	$\{x : x \in R , a \leqslant x \leqslant b\}$	a ● ——— ● b
الفترة المفتوحة: $]a , b[$	$]a , b[$	$\{x : x \in R , a < x < b\}$	a ○ ——— ○ b
الفترة نصف مفتوحـة أو الفترة نصف مغلقة: $[a , b[$	$[a , b[$	$\{x : x \in R , a \leqslant x < b\}$	a ● ——— ○ b
الفترة نصف مفتوحـة أو الفترة نصف مغلقة: $]a , b]$	$]a , b]$	$\{x : x \in R , a < x \leqslant b\}$	a ○ ——— ● b

ثانيا الفترات غير المحدودة:

- تمتد مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد فى الاتجاه الموجب إلى ما لا نهاية (∞) وتمتد فى الاتجاه السالب إلى سالب ما لا نهاية $(-\infty)$
- يستخدم الرمزان ∞ و $-\infty$ فى التعبير عن المجموعات غير المحدودة وهما رمزان يعبران عن عدم معرفتنا بأكبر، وأصغر عدد.

إذا كان $a \in R$ فإن:

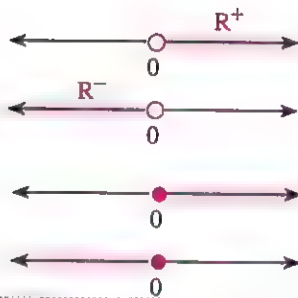
الفتـرة	التعبير بالصفة المميزة	التمثيل على خط الأعداد
$[a, \infty[$	$\{x : x \in R , x \geqslant a\}$	a
$]-\infty, a]$	$\{x : x \in R , x \leqslant a\}$	a
$]a, \infty[$	$\{x : x \in R , x > a\}$	a
$]-\infty, a[$	$\{x : x \in R , x < a\}$	a

نقاط هامة

- الفترة $]-\infty , \infty[$ تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث $\infty \notin R$ ، $-\infty \notin R$
- $R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$

حيـث: R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $=]0 , \infty[$
R^- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $=]-\infty , 0[$

- $R^+ \cup R^- = R - \{0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $= R^+ \cup \{0\} = [0 , \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $= R^- \cup \{0\} =]-\infty , 0]$



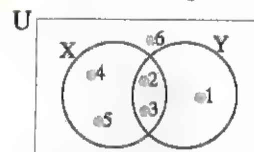
العمليات على الفترات:

تذكـر أن المجموعات والعمليات عليها .

بفرض أن: $X = \{2 , 3 , 4 , 5\}$, $Y = \{1 , 2 , 3\}$, $U = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

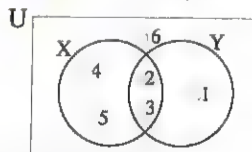
فيكـون :

1 الاتحاد $(X \cup Y)$:
هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X أو Y



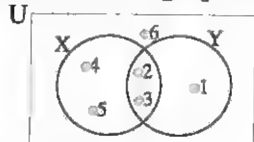
$\therefore X \cup Y = \{1 , 2 , 3, 4, 5\}$

2 التقاطع $(X \cap Y)$:
هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X و Y



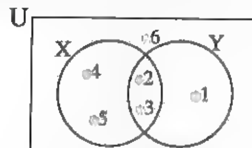
$\therefore X \cap Y = \{2 , 3\}$

3 الفـرق $(X - Y)$:
هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X ولا تنتمى إلى Y



$\therefore X - Y = \{4, 5\}$

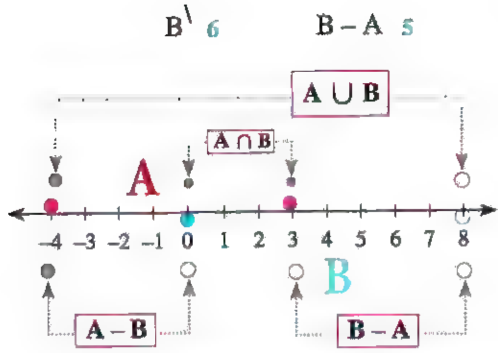
4 المكملة X' :
هى مجموعة العناصر التى تنتمى إلى U ولا تنتمى إلى X



$\therefore X' = U - X = \{1 , 6\}$

إذا كانت: $B = [0 , 8[$ ، $A = [-4 , 3]$ فأوجد مستعينًا بخط الأعداد:

1 $A \cap B$ 2 $A \cup B$ 3 $A - B$ 4 A' 5 $B - A$ 6 B'



1 $A \cap B = [0 , 3]$

2 $A \cup B = [-4 , 8[$

3 $A - B = [-4 , 0[$

4 $A' =]-\infty , -4[\cup]3 , \infty[$ أو $A' = R - [-4 , 3]$

5 $B - A =]3 , 8[$

6 $B' =]-\infty , 0[\cup [8 , \infty[$ أو $B' = R - [0 , 8[$

العمليات على الأعداد الحقيقية (Operations on Real Numbers)

خواص العمليات (+ ، ×) على الأعداد الحقيقية:

إذا كانت a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية فإن:

الخاصية	في عملية الجمع	في عملية الضرب
الانغلاق	$a + b \in R$	$a \times b \in R$
الإبدال	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
الدمج (التجميع)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
توزيع الضرب على الجمع	$a (b + c) = ab + ac$ ، $(b + c) a = ba + ca$	
المحايد	المحايد الجمعي هو 0 $a + 0 = 0 + a = a$	المحايد الضربي هو 1 $a \times 1 = 1 \times a = a$
المعكوس	المعكوس الجمعي للعدد a هو $(-a)$ حيث: $a + (-a) = 0$	المعكوس الضربي للعدد a هو: $\frac{1}{a}$ (حيث $a \neq 0$) حيث: $a \times \frac{1}{a} = 1$

قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية (Laws of Square and Cube Roots)

ضرب وقسمة الجذور التربيعية:

إذا كان a , b عددين حقيقيين غير سالبين، فإن:

1 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

2 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ بشرط أن: $b \neq 0$

ضرب وقسمة الجذور التكعيبية:

إذا كان a , b عددين حقيقيين، فإن:

1 $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$

2 $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ، $b \neq 0$

قوانين الأسس في الأعداد الحقيقية (Laws of Exponents in Real Numbers)

أولًا قوانين الضرب:

1 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

ثانيًا قوانين القسمة:

1 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

الأس الصفري والأس السالب:

1 $a^0 = 1$

2 $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر (Factorizing by Taking Out Greatest Common Factor GCF)

تحليل كثيرة الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ)

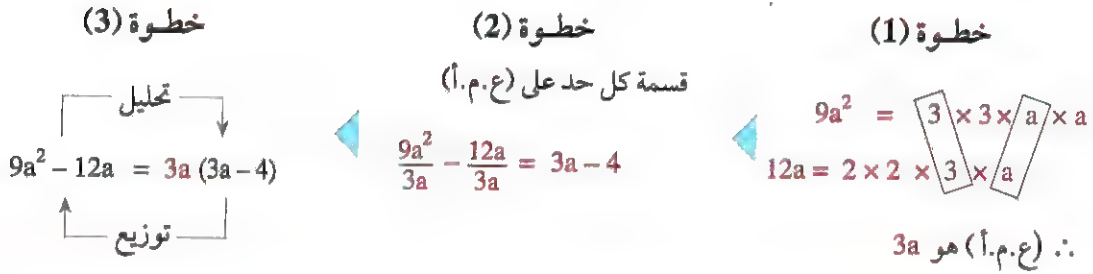
كثيرة الحدود هى تعبير رياضى فيه جميع أسس متغيراته (إن وجدت) تكون أعدادًا صحيحة موجبة.

أمثلة لكثيرات الحدود:

- كثيرة حدود (وحيدة الحد): $\frac{1}{2}xy$, y^2 , $2ab$, $-x$
- كثيرة حدود (ثنائية حدود): $2a^2b+3ba$, x^2+2xy , $x-y$
- كثيرة حدود (ثلاثية حدود): $2a^2+3b+8$, x^3+x^2-3y

تحليل كثيرة الحدود: هو تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عاملين (أو أكثر):

عند تحليل كثيرة الحدود $(9a^2-12a)$ نتبع الخطوات الآتية:



تحليل ثلاثية الحدود (Factorizing Trinomial)

تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: x^2+bx+c

لتحليل ثلاثية الحدود على صورة: x^2+bx+c (حيث c ، b عددان صحيحان)

نوجد عددين صحيحين ℓ ، m (بحيث: $b=\ell+m$ ، $c=\ell m$)

ثم نكتب $x^2+bx+c=(x+\ell)(x+m)$ مع ملاحظة أنه:

1. إذا كانت c موجبة فإن ℓ و m لهما نفس إشارة b
2. إذا كانت c سالبة فإن ℓ و m مختلفان فى الإشارة وأكبرهما عدديًا له نفس إشارة b

تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: ax^2+bx+c حيث $(a \neq \pm 1)$

لتحليل ثلاثية الحدود $2x^2+9x+10$ نتبع الآتى:

1. نحلل $2x^2$ إلى $\boxed{2x \ , \ x}$ ⟵ $(2x \quad)(x \quad)$
2. نحلل العدد 10 إلى $\boxed{+1 \ , +10}$ أو $\boxed{+2 \ , \ +5}$ مع استبعاد العوامل السالبة لأن معامل x إشارته موجبة.
3. نحدد الحد الأوسط المناظر، كما بالجدول المقابل:

التحليل الممكن	الحد الأوسط المناظر
$(2x+1)(x+10)$	$20x+x = 21x$ ✗
$(2x+10)(x+1)$	$2x+10x = 12x$ ✗
$(2x+2)(x+5)$	$10x+2x = 12x$ ✗
$(2x+5)(x+2)$	$4x+5x = 9x$ ✓

$\therefore 2x^2+9x+10=(2x+5)(x+2)$

تحليل الحالات الخاصة (Factorizing Special cases)

تحليل ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملًا:

نكتبها على صورة حاصل ضرب عاملين متساويين (أى: مربع أحد عامليها المتساويين):

أى أن:

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

كيفية إيجاد المجهول فى ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملًا:

- الحد الأول = $\frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{\text{(الحد الثالث)} \times 4}$
- الحد الثالث = $\frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{\text{(الحد الأول)} \times 4}$
- الحد الأوسط = $\left(\pm 2 \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

تحليل الفرق بين مربعين:

- الفرق بين مربعى كميتين = مجموع الكميتين × الفرق بينهم

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما:

1 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(مثل الإشارة – عكس الإشارة – دائمًا موجبة)

2 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(مثل الإشارة – عكس الإشارة – دائمًا موجبة)

التحليل بالتقسيم (Factorizing by Grouping)

التحليل بالتقسيم

يمكن تحليل كثيرة حدود مكونة من أربعة حدود باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

لاحظ أن

- تحليل كثيرات الحدود على الصورة: $a x^2 + bx - c$ حيث $(a \neq 1)$ باستخدام التحليل بالتقسيم كما يلى:

1 أوجد عاملين حاصل ضربهما (ac) ومجموعهما (b).

2 أعد كتابة (bx) فى صورة ناتج جمع هذين العاملين.

3 استخدام التحليل بالتقسيم.

الطريقة الأولى

- نقسم كثيرة الحدود إلى ثنائيتى حدود، بحيث نستطيع تحليل كل ثنائية حدود، ثم نخرج ثنائية الحدود المكررة كعامل مشترك.

الطريقة الثانية

- يتم تقسيم كثيرة الحدود إلى ثلاثية حدود، تمثل مربعًا كاملًا والحد الرابع يجب أيضًا أن يكون مربعًا كاملًا، بحيث يتم تحليل كثيرة الحدود الأصلية كفرق بين مربعين.

التحليل بإكمال المربع:

- إكمال المربع: هو عملية إضافة حد جبرى إلى ثنائية حدود لتصبح ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

يمكن أن يتم إكمال المربع بإحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى

- بإضافة (الحد الأوسط) = $\left(\pm 2\sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

فمثلًا

$x^2 + 9$ يضاف إليها $\pm 6x = (\pm 2\sqrt{x^2} \times \sqrt{9})$

فيكون $(x^2 \pm 6x + 9)$ مربعًا كاملًا أى يكتب على الصورة $(x \pm 3)^2$

الطريقة الثانية

- بإضافة (الحد الثالث) = $\frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{\text{الحد الأول} \times 4}$

فمثلًا

$x^2 + 8x$ يضاف إليها $\frac{(8x)^2}{(x^2 \times 4)} = \frac{64x^2}{4x^2} = 16$

فيكون $(x^2 + 8x + 16)$ مربعًا كاملًا أى يكتب على الصورة $(x + 4)^2$

التطابق (Congruence)

1 تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا كانتا متساويتين فى الطول.

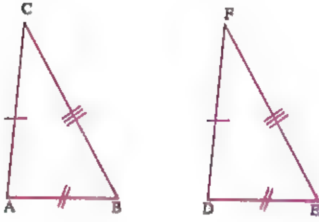
2 تتطابق الزاويتـان إذا كانتا متساويتيـن فى القيـاس.

3 يتطابق المضلعان اللذان لهما نفس العدد من الأضلاع. (إذا تحقق الشرطـان الآتيان معًا)

1 أضلاعهما المتناظرة متساوية فى الطول.   2 زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس.

تطابق مثلثين:

الحالة الأولى: ثلاثة أضلاع (SSS)



يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظيره فى المثلث الآخر.

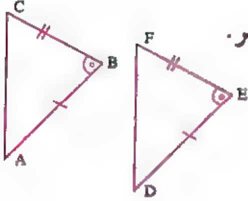
فى المثلثين: DEF , ABC

إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ وينتج من التطابق أن:

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

الحالة الثانية: ضلعان وزاويـة محصورة (SAS)



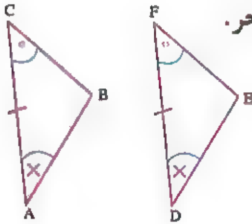
يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.

فى المثلثين: DEF , ABC   إذا كان: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

وينتج من التطابق أن: $\angle C \cong \angle F$, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

الحالـة الثالثة: زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما (ASA)



يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.

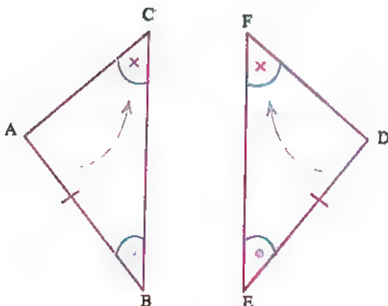
فى المثلثين: DEF , ABC   إذا كان: $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ وينتـج من التطابـق:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle E$

الحالة الرابعة: زاويتان وضلع غير واصل بين الرأسين (AAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير واصل بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.



فى المثلثين: DEF , ABC

إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle C \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle E$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

وينتـج من التطابـق:

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$

الحالة الخامسة: وتر وأحد ضلعي القائمة (RHS)

يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظيريهما فى المثلث الآخر.

فى المثلثين: ABC , DEF إذا كان: $m(\angle B) = m(\angle E) = 90°$

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

وينتج من التطابق:

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$





نظرية فيثاغورس وعكسها (Pythagoras' Theorem and its Converse)

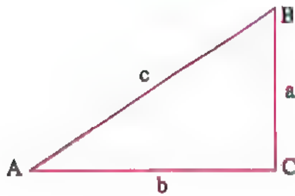
- نظرية فيثاغورس هى معادلة تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- مساحة المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية

تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة.

أى أن: $c^2 = a^2 + b^2$

(حيث: a ، b طولا ضلعى القائمة فى المثلث، c طول وتر هذا المثلث).

ويمكننا استنتاج: $a^2 = c^2 - b^2$ **2** $b^2 = c^2 - a^2$ **1**



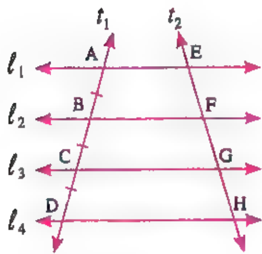
عكس نظرية فيثاغورس:

إذا كان مجموع مربعى طولى ضلعين فى مثلث يساوى مربع طول الضلع الثالث، كان المثلث قائم الزاوية.

إذا كان: المثلث ABC فيه: $a^2 + b^2 = c^2$

فإن: $m(\angle C) = 90°$

أى أن: المثلث ABC يكون قائم الزاوية فى C



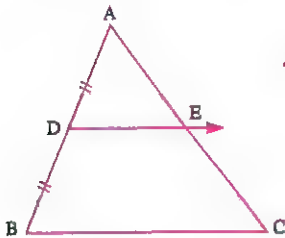
تطبيقات التوازى (Applications of Parallelism)

1 إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأى قاطع آخر تكون متساوية فى الطول.

إذا كان: $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$ ،

t_1 ، t_2 قاطعان لهم

بحيث: AB = BC = CD فإن: EF = FG = GH

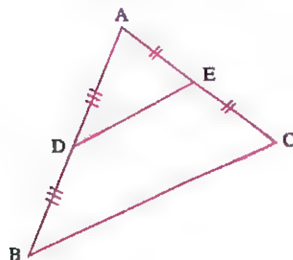


2 الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

فى الشكل المقابل:

إذا كانت: D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$

فإن: E نقطة منتصف $\overline{AC}$ أى أن: AE = EC



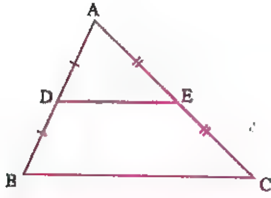
3 القطعة المتوسطة فى المثلث هى القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث.

إذا كانت: D نقطة منتصف $\overline{AB}$

E نقطة منتصف $\overline{AC}$

فإن: $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى $\triangle ABC$

4 القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.



فى الشكل المقابل: إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى $\Delta\, ABC$

فإن: 1 $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

2 $DE = \frac{1}{2} BC$

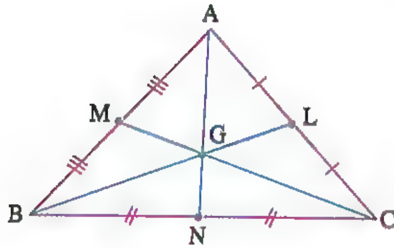
متوسطات المثلث (Medians Of The Triangle)

1 متوسط المثلث: هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رءوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

2 متوسطات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

3 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة $1 : 2$ من جهة الرأس.

فى الشكل المقابل:



إذا كانت: G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

فإن:

- $AG = 2\, GN$ ومنها ← $GN = \frac{1}{2} AG$
- $AG = \frac{2}{3} AN$ ومنها ← $AN = \frac{3}{2} AG$
- $GN = \frac{1}{3} AN$ ومنها ← $AN = 3\, GN$

4 طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.

5 إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس، فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.

المثلث المتساوى الساقين (Isosceles Triangle)

1 زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.

2 زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين دائمًا حادتان.

3 زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يمكن أن تكون قائمة أو حادة أو منفرجة.

4 المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة. ويكون : قياس كل زاوية داخلة فى المثلث المتساوى الأضلاع تساوى $60°$

5 قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس المثلث المتساوى الأضلاع تساوى $120°$

6 محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من نقطة منتصفها.

7 النقطة التى تنتمى إلى محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

8 محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو مستقيم يمر برأس المثلث وعمودى على قاعدته.

9 متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس **ينصف** زاوية الرأس ويكون **عموديًّا** على القاعدة.

10 منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين **ينصف القاعدة** ويكون **عموديًّا** عليها.

11 المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًّا على القاعدة **ينصف** كلًّا من **القاعدة وزاوية الرأس**.

المثلث الثلاثينى الستينى:

- المثلث الثلاثينى الستينى هو مثلث قائم الزاوية.
- زاويتاه الحادتان قياساهما $30°$ ، $60°$
- فى المثلث الثلاثينى الستينى طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها $30°$ يساوى نصف طول الوتر.

الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات (Interior and Exterior Angles of Polygons)

1 مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب = $(n-2) \times 180°$ (حيث n عدد أضلاع المضلع).

2 مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب يساوى $360°$ (زاوية واحدة عند كل رأس).

فى المضلـع المنتظـم الذى عدد أضـلاعه (n) ضلعًـا يكـون:

3 قيـاس الزاويـة الداخـلة = $\frac{(n-2) \times 180°}{n}$

4 قيـاس الزاويـة الخارجـة عند أحد رءوسـه = $\frac{360°}{n}$

5 يمكن إيجاد عدد أضلاع المضلع المنتظم كالآتى:

1 إذا علمت قياس زاويته الخارجة ← عدد الأضلاع = $\frac{360°}{\text{الزاوية الخارجة}}$

2 إذا علمت قياس زاويته الداخلة ← عدد الأضلاع = $\frac{360°}{\text{مكملة الزاوية الداخلة}}$

6 عدد أقطار المضلع المحدب يساوى $\frac{n(n-3)}{2}$ ، حيث n هو عدد الأضلاع.

الإحصاء

مقاييس النزعة المركزية هى القيم التى تصف مركز تجمع مجموعة من البيانات، مثل: الوسط الحسابى، الوسيط، المنوال.

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

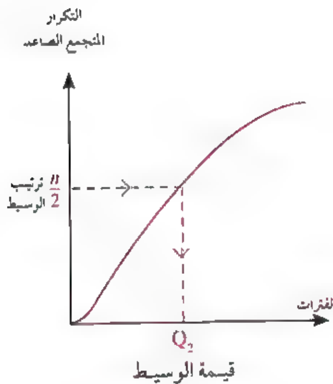
الوسط: هو القيمة التى تتوسـط مجموعـــة من القيم بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

المنـوال: هو القيمة الأكثر شيوعًا (تكرارًا).

الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

$$\text{الوسط الحسابى } (\bar{x}) = \frac{\Sigma (f \cdot x_m)}{\Sigma f}$$

الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

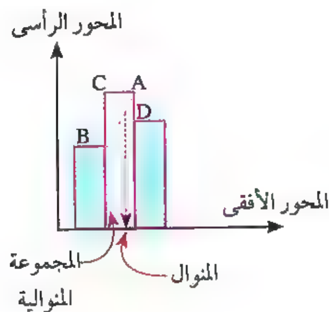


يمكن تقدير الوسيط من المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد كالآتى:

1 نعيِّـن ترتـيب الوسـيـط = $\frac{n}{2}$ (حيث n مجموع التكرارات على المحور الرأسى).

2 نعيِّـن النقطة التى تمثِّل ترتيب الوسيط على المحور الرأسى، ونرسم منها خطًّا أفقيًّا يقطع المنحنى المتجمع الصاعد فى نقطة، فيكون مسقط هذه النقطة على المحور الأفقى هو قيمة الوسيط (Q_2)

المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات



يمكنك تقديـر المنوال لتوزيع تكـــرارى ذى مجموعات عن طريق رســم المدرج التكرارى وتحديد المجموعة الأكثر تكرارًا، وتســـمى المجموعة المنوالية، ثم تحديد مسقط نقطة تقاطع $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ على المحور الأفقى، وتكون هى القيمة المنوالية.

امتحانات الأضواء الاسترشادية

امتحان 1

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كان: $(x-2)^0 = 1$ ، فإن: .... $x \in$

(أ) $R - \{2\}$ (ب) $R - \{-2\}$ (جـ) $\{2\}$ (د) $\{-2\}$

2 إذا كان: $m \times \sqrt{3} = 1$ ، فما قيمة m ؟ ....

(أ) 1 (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) $-\sqrt{3}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3 إذا كان: (x^2+x+1) ، أحد عاملى المقدار (x^3-1) فما العامل الآخر؟ ....

(أ) x^2+1 (ب) x^2-1 (جـ) $x-1$ (د) $x+1$

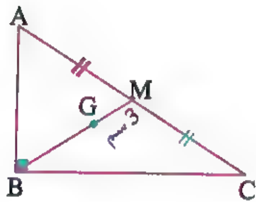
4 مجموعة حل المعادلة: $a^2 = 3a$ فى R هى ....

(أ) $\{3\}$ (ب) $\{0, 3\}$ (جـ) $\{0\}$ (د) $\{0, -3\}$

5 عند إكمال المربع للمقدار: (y^2+25) نضيف إليه ....

(أ) $\pm 2y$ (ب) $\pm 5y$ (جـ) $\pm 20y$ (د) $\pm 10y$

6 فى الشكل المقابل:



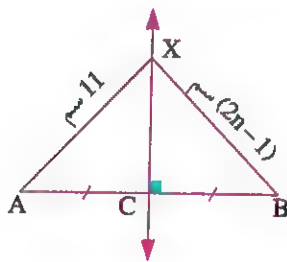
إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC القائم الزاوية فى B ،

GM = 3 سم، فما طول $\overline{AC}$؟ ....

(أ) 8 سم (ب) 12 سم

(جـ) 18 سم (د) 24 سم

7 فى الشكل المقابل:



قيمة n تساوى ....

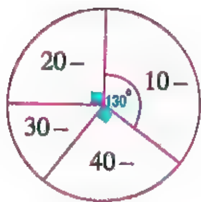
(أ) 11 (ب) 10

(جـ) 6 (د) 12

8 قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الخماسى المنتظم عند أحد رؤوسه = ...

(أ) $108°$ (ب) $72°$ (جـ) $60°$ (د) $45°$

9 من مخطط القطاعات الدائرية المقابل،



ما الفترة المنوالية؟ ....

(أ) – 10 (ب) – 20

(جـ) – 30 (د) – 40

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت: $a=\sqrt{7}+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ ،

فأوجد فى أبسط صورة كلًّا مما يأتى:

[1] $(a-b)^2$ [2] $a\,b$

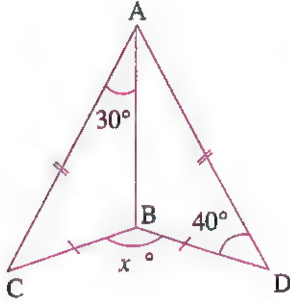
2 أوجد مستعينًا بخط الأعداد المقابل:



[1] $X \cap Y = ...$ [2] $X \cup Y = ...$

[3] $X - Y = ...$ [4] $Y' = ...$

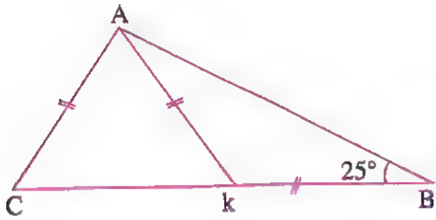
3 فى الشكل المقابل:



[1] أثبت أن: $\Delta ABD \equiv \Delta ABC$

[2] أوجد قيمة x بالبرهان.

4 فى الشكل المقابل:



$m(\angle B) = 25°$, $k \in \overline{CB}$

أوجد بالبرهان: $m(\angle CAB)$

5 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

[1] $6x - y + 3xy - 2$ [2] $y^2 - 16$ [3] $a^3 + 64$

6 أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 6x = -8$ فى R

7 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –	المجموع
التكرار	3	4	6	5	2	20

امتحان 2

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كان: $k \in]1, 4[$ ، فإن k يمكن أن تساوى ....

(أ) 1 (ب) 4 (جـ) 2 (د) 5

2 المعكوس الجمعى للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ هو

(أ) $\sqrt{7}$ (ب) -7 (جـ) $-\sqrt{7}$ (د) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

3 إذا كان: $a+b=4$, $x+y=6$ ، فإن: $x(a+b)+y(a+b)=........$

(أ) 10 (ب) 24 (جـ) 4 (د) 2

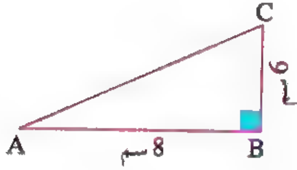
4 إذا كانت كثيرة الحدود $(x^2 + nx + 49)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة n ؟ ....

(أ) ± 6 (ب) ± 14 (جـ) ± 7 (د) ± 4

5 إذا كان: $a^2 - b^2 = 15$, $a - b = 3$ ، فإن: $a + b =$ ....

(أ) 5 (ب) 15 (جـ) 2 (د) 12

6 فى الشكل المقابل:

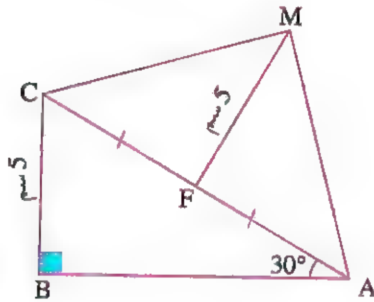


مساحة المربع المنشأ على $\overline{AC} =$ ....

(أ) 10 سم^2 (ب) 36 سم^2

(جـ) 100 سم^2 (د) 14 سم^2

7 فى الشكل المقابل:



$m(\angle CMA) =$ ....

(أ) 50° (ب) 60°

(جـ) 90° (د) 100°

8 ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة 144° ؟ ...

(أ) 7 (ب) 8 (جـ) 9 (د) 10

9 إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ما هو 20 ومركزها هو 25، فما الحد الأعلى لهذه المجموعة؟ . . .

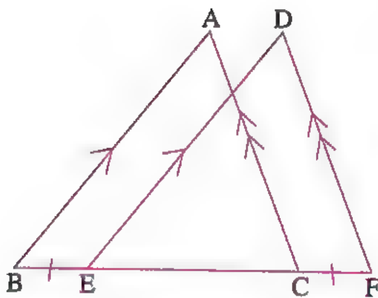
(أ) 20 (ب) 30 (جـ) 40 (د) 50

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة: $2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

2 إذا كانت: $2^a = 7$ أوجد قيمة 2^{a+1}

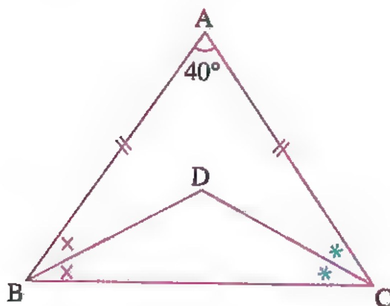
3 فى الشكل المقابل:



$\overline{BA} // \overline{ED}$, $\overline{CA} // \overline{FD}$, $\overline{BE} \cong \overline{FC}$

برهن أن: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

4 فى الشكل المقابل:



$AB = AC$, $m(\angle A) = 40°$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ ، $\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

[1] أثبت أن: المثلث DBC متساوى الساقين.

[2] أوجد: $m(\angle BDC)$

5 حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا:

[1] $3x^2 - 3y + xy - 9x$ [2] $y^3 - 1$

6 أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$ فى R

7 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	5 –	15 –	25 –	35 –	45 –	المجموع
التكرار	7	10	12	13	8	50

امتحان 3

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كان: $(x-4)^0 = 1$ ، فإن: $x \in$ ....

(أ) $R - \{4\}$ (ب) $R - \{-4\}$ (جـ) $\{4\}$ (د) $\{-4\}$

2 $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 =$ ....

(أ) 5^2 (ب) 5^{10} (جـ) 5^3 (د) 2^5

3 مجموعة حل المعادلة: $x^2 - x = 0$ فى R هى ....

(أ) $\{1\}$ (ب) $\{0 , 1\}$ (جـ) $\{0\}$ (د) $\{-1\}$

4 عند إكمال المربع للمقدار: $(x^2 + 16)$ نضيف إليه ....

(أ) $\pm 2x$ (ب) $\pm 4x$ (جـ) $\pm 16x$ (د) $\pm 8x$

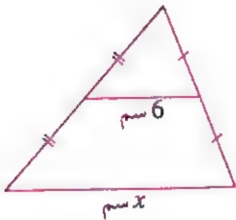
5 إذا كان: $a + b = 3$, $x - y = -5$ ، فإن: $a(x-y) + b(x-y) =$ ....

(أ) 2 (ب) −15 (جـ) 15 (د) −2

6 فى المثلث الثلاثينى الستينى طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها °30 يساوى .... طول الوتر.

(أ) ربع (ب) ضعف (جـ) نصف (د) ثلاثة أمثال

7 فى الشكل المقابل:



قيمة x تساوى .... سم

(أ) 24 (ب) 6

(جـ) 8 (د) 12

8 ما عدد أقطار المضلع الخماسى المحدب؟ ....

(أ) 5 (ب) 9 (جـ) 0 (د) 10

9 إذا كان $\sum f = 50$, $\sum f.x_m = 500$ ، فما الوسط الحسابى $\bar{x}$ ؟ ....

(أ) 10 (ب) 5 (جـ) 50 (د) 15

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت: $B = [1, 9]$, $A =]-\infty, 5[$ فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى:

1 $A \cup B$ 2 $\acute{A}$ 3 $A - B$

2 إذا كانت: $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ فأوجد فى أبسط صورة كلًّا مما يأتى:

1 xy 2 $\frac{x}{y}$

3 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{FD} \cong \overline{FE}$

اثبت أن المثلث FMN متساوى الساقين.

4 فى الشكل المقابل:

إذا كان: MC = 15 سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{ME}$

5 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $y^3 + 27$ 2 $4x^2 - 9$

6 أوجد مجموعة حل المعادلة $y^2 - 21 = 4y$ فى R

7 من التوزيع التكرارى التالى حدد الفترة المنوالية، ثم أوجد القيمة المنوالية:

الفترات	2 –	4 –	6 –	8 –	10 –	المجموع
التكرار	3	10	12	10	5	40

امتحان 4

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\sqrt{2}$

2 نصف العدد 2^{16} يساوى ....

(أ) 2^8 (ب) 1^{16} (جـ) 2^{14} (د) 2^{15}

3 إذا كان: $a^2 - b^2 = 20$, $a + b = 5$ ، فإن: $b - a = \dots\dots\dots$

(أ) 15 (ب) −15 (جـ) 4 (د) −4

4 إذا كان: $x^2 + ax + 15 = (x+3)(x+b)$ فما قيمة $a \times b$ ؟

(أ) 5 (ب) 8 (جـ) 13 (د) 40

5 إذا كانت كثيرة الحدود (x^2+mx+9) مربعًا كاملًا، فما قيمة m ؟ ....

(أ) ± 6 (ب) ± 4 (جـ) ± 12 (د) ± 9

6 فى الشكل المقابل:

$m(\angle MFC) =$ ....

(أ) 50° (ب) 60°

(جـ) 90° (د) 100°

7 محيط المثلث المقابل يساوى .... م

(أ) 14 (ب) 24

(جـ) 8 (د) 16

8 فى الشكل المقابل:

$m(\angle DBC) =$ .... °

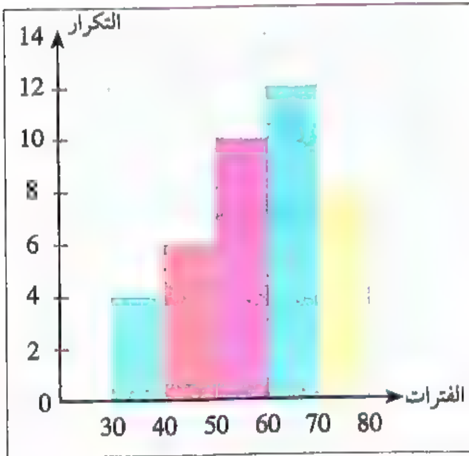
(أ) 110 (ب) 70

(جـ) 115 (د) 60

9 من المدرج التكرارى المقابل، ما الفترة المنوالية؟ ....

(أ) –40 (ب) –50

(جـ) –60 (د) –70



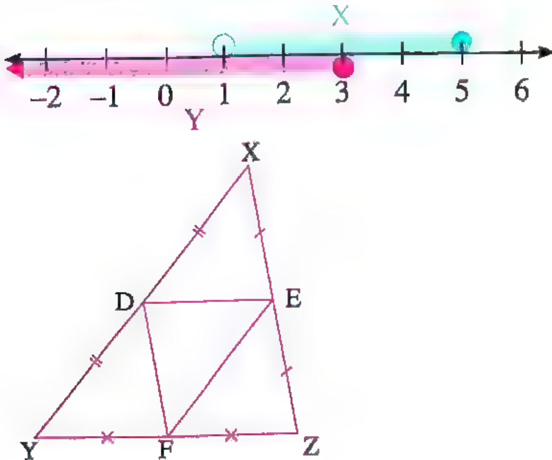
المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 اختصر لأبسط صورة: $-3\sqrt{7}+3\sqrt[3]{5}+5\sqrt{7}-\sqrt[3]{5}$

2 أوجد مستعينًا بخط الأعداد المقابل:

1 $X \cap Y =$ .... 2 $X \cup Y =$ ....

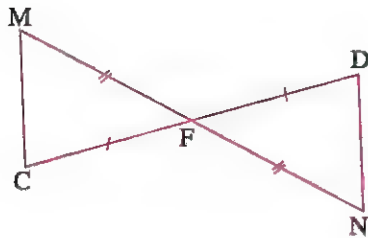
3 $\acute{Y} =$ .... 4 $Y - X =$ ....



3 فى الشكل المقابل:

إذا كان محيط ΔXYZ يساوى 20 سم

أوجد بالبرهان محيط ΔDEF



4 في الشكل المقابل:

إذا كانت F نقطة منتصف كل من $\overline{MN}$, $\overline{CD}$

برهن أن: [1] $\Delta MFC \cong \Delta NFD$ [2] $\overline{MC} \parallel \overline{DN}$

5 حلل كلًا مما يأتي تحليلًا تامًا:

[1] $x^4 + 4y^4$ [2] $2x^3 + 4x^2$ [3] $3x^2 - 3y + xy - 9x$

6 أوجد مجموعة حل المعادلة $y^2 - 3y = 10$ في R

7 من الجدول التكراري التالي:

المجموعات	0 –	10 –	20 –	30 –	40 –
التكرار	6	8	12	10	4

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

امتحان 5

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 $Q \cup Q` = ...$

(أ) R (ب) $Q`$ (جـ) Z (د) $\varnothing$

2 مستعينًا بخط الأعداد المقابل:

$X \cap Y = ...$

(أ) $[0 , 3[$ (ب) $]0 , 3[$ (جـ) $[-1 , 6]$ (د) $]-1 , 6[$

3 إذا كان $y^2 + 7y + 12 = (y + a)(y + b)$ ، فما قيمة $a + b$؟ ....

(أ) 12 (ب) 7 (جـ) 19 (د) 5

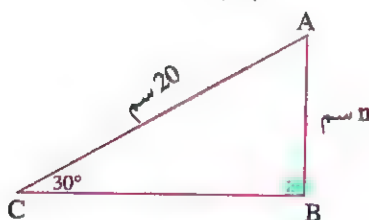
4 إذا كان: $a^2 - b^2 = 16$ ، $a - b = 2$، فإن .... $= a + b$

(أ) 14 (ب) 18 (جـ) 8 (د) -8

5 إذا كانت كثيرة الحدود: $(kx^2 + 20x + 25)$، مربعًا كاملًا فإن .... $= k$

(أ) 1 (ب) 8 (جـ) 4 (د) -4

6 في الشكل المقابل: .... $= n$

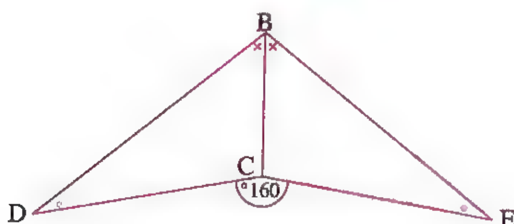


(أ) 5 (ب) 20

(جـ) 30 (د) 10

7 إذا كان: $\Delta BCE \cong \Delta BCD$ ، $m(\angle DCE) = 160°$

فإن $m(\angle BCE) = ...°$



(أ) 100 (ب) 50

(جـ) 200 (د) 10

8 الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث

موازيًا أحد الضلعين الآخرين .... الضلع الثالث.

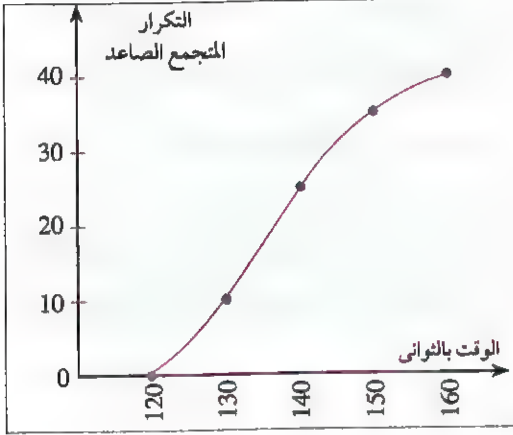
(أ) يطابق (ب) ينصف

(جـ) عمودى على (د) ليس شىء مما سبق

9 الوسيط للمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد المقابل هو ....

(أ) 130 (ب) 140

(جـ) 120 (د) 137



المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة:

1 $5\sqrt{3}-3\sqrt{7}+\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{7}$

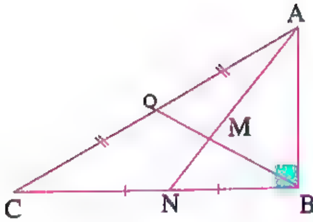
2 $\dfrac{(\sqrt{2})^3\times 8}{(\sqrt{2})^4\times(\sqrt{2})^5}$

2 إذا كانت $3^b = 5$ فأوجد قيمة 3^{b+1}

3 فى الشكل المقابل: N ، Q منتصفا $\overline{BC}$ ، $\overline{AC}$ على الترتيب،

BC = 12 سم، AB = 9 سم، $m(\angle ABC)=90^\circ$

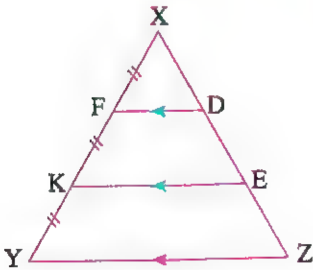
أوجد بالبرهان طول $\overline{MB}$



4 فى الشكل المقابل:

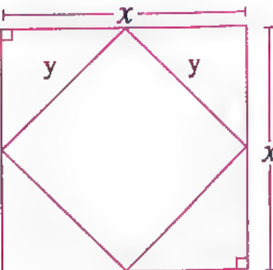
إذا كان: XZ = 24 سم

فأوجد بالبرهان طول $\overline{DE}$



5 عبر عن مساحة الجزء المظلل فى الشكل المقابل

كحاصل ضرب عاملين



6 أوجد القيمة العددية للمقدار $13 \times 115 - 13 \times 16 + 13$ باستخدام التحليل بإخراج المعامل المشترك الأكبر.

7 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	0 –	10 –	20 –	30 –	40 –	المجموع
التكرار	4	5	8	16	7	40

امتحان 6

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 $\sqrt{-1}$ .... R

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

2 ما قيمة $3^2 + 3^2 + 3^2$؟ ....

(أ) 3^6 (ب) 9^2 (جـ) 3^3 (د) 3

3 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $12y^2 - 3y$ هو ....

(أ) 3 (ب) y (جـ) $3y$ (د) $4y$

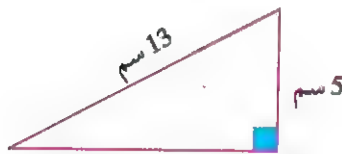
4 مجموعة حل المعادلة: $x^2 + 4 = 0$ فى R هى ....

(أ) ± 2 (ب) ± 4 (جـ) 0 (د) $\varnothing$

5 إذا كان $(x+2)$ أحد عاملى المقدار $(x^2 - 5x - 14)$، فما العامل الآخر؟ ....

(أ) $(x+2)$ (ب) $(x-7)$ (جـ) $(x+4)$ (د) $(x+7)$

6 مساحة المثلث المقابل تساوى .... سم^2



(أ) 30 (ب) 60

(جـ) 65 (د) 15

7 إذا كان: $\Delta\, BDE \cong \Delta\, FCH$ ، $m(\angle D) + m(\angle E) = 130°$ فإن $m(\angle F) =$ ....

(أ) $20°$ (ب) $30°$ (جـ) $40°$ (د) $50°$

8 إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث ABC وكان $c^2 > a^2 + b^2$ فإن المثلث ....

(أ) حاد الزوايا (ب) قائم الزاوية (جـ) منفرج الزاوية (د) متساوى الأضلاع

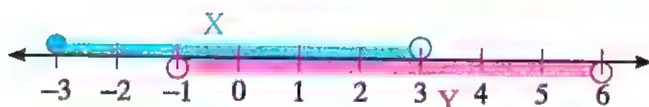
9 كل مما يأتى من مقاييس النزعة المركزية ما عدا ....

(أ) الوسط الحسابى (ب) الوسيط (جـ) المنوال (د) المدى

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

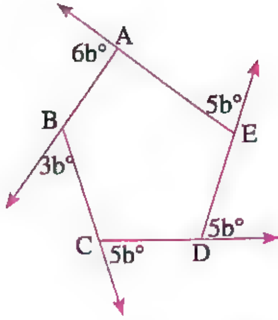
1 اختصر لأبسط صورة المقدار: $\frac{(5)^{2n+1} \times (3)^{2n+1}}{(15)^{2n}}$

2 أوجد مستعينًا بخط الأعداد المقابل:



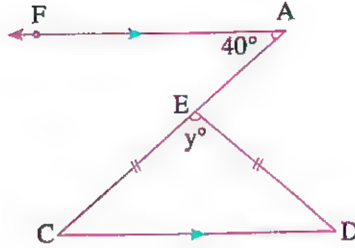
1 $X \cap Y =$ .... 2 $X \cup Y =$ ....

3 $X - Y =$ .... 4 $Y - X =$ ....



3 فى الشكل المقابل:

أوجد: $m(\angle BCD)$



4 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overrightarrow{AF} // \overline{CD}$ ، $ED = EC$

أوجد بالبرهان قيمة y

5 إذا كان $a^2 - b^2 = 6$ ، $a - b = 2$ فأوجد القيمة العددية للمقدار: $a + b$

6 أوجد قيمة a التى تجعل المقدار $y^2 + 14y + a$ مربعًا كاملًا.

7 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	0 –	20 –	40 –	60 –	80 –	المجموع
التكرار	4	5	7	16	8	40

امتحان 7

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 $Q \cap Q' = ...$

(أ) R (ب) Q (جـ) Z (د) $\varnothing$

2 المعكوس الجمعى للعدد $8 - \sqrt{5}$ هو ....

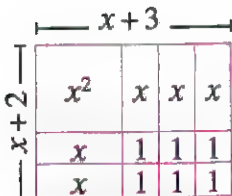
(أ) $8 + \sqrt{5}$ (ب) $-8 - \sqrt{5}$ (جـ) $-(\sqrt{5} - 8)$ (د) $-8 + \sqrt{5}$

3 إذا كان: $y^2 - b^2 = (y - 2)(y + 2)$، فما قيمة b؟ ..

(أ) ± 1 (ب) ± 8

(جـ) ± 4 (د) ± 2

4 المقدار الذى يعبر عنه التحليل فى النموذج المقابل هو ....



(أ) $x^2 + 6x + 5$ (ب) $x^2 + 5x + 6$

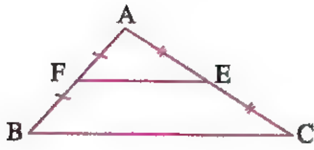
(جـ) $x^2 + 7x + 12$ (د) $x^2 + x - 12$

5 إذا كانت كثيرة الحدود $(y^2 + my + 25)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة m؟

(أ) ± 7 (ب) ± 5 (جـ) ± 10 (د) ± 3

6 طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى .... طول وتر هذا المثلث.

(أ) ربع (ب) ضعف (جـ) نصف (د) ثلاثة أمثال



7 فى الشكل المقابل إذا كانت $\overline{FE}$ قطعة متوسطة فى Δ ABC ، طول $\overline{BC} = 6$ سم

فإن طول $\overline{FE}$ = ... سم

(أ) 12 (ب) 3

(جـ) 9 (د) 10

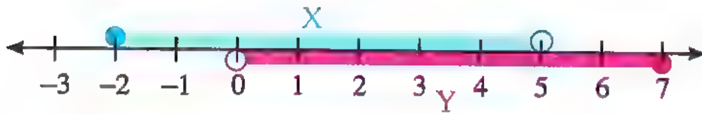
8 إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث ABC وكان $c^2 = a^2 + b^2$ فيكون المثلث ....

(أ) حاد الزوايا (ب) قائم الزاوية (جـ) منفرج الزاوية (د) متساوى الأضلاع

9 إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 90 والحد الأدنى لهذه المجموعة هو 80 فإن مركزها يكون ....

(أ) 100 (ب) 85 (جـ) 70 (د) 60

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

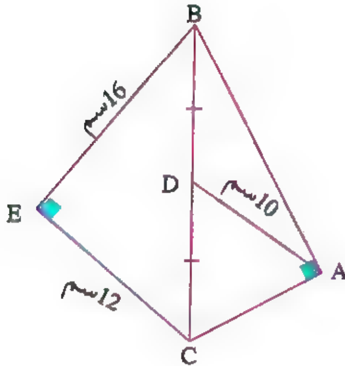


1 أكمل مستعينًا بخط الأعداد المقابل:

[1] $X \cap Y =$ .... [2] $X \cup Y =$ ....

[3] $X - Y =$ .... [4] $Y - X =$ ....

2 إذا كانت: $a = 5\sqrt{3}$ ، $b = 3\sqrt{5}$، فأوجد القيمة العددية للمقدار $(a-b)^2$



3 فى الشكل المقابل:

إذا كانت D منتصف $\overline{BC}$

أثبت أن: $m(\angle BAC) = 90°$

4 فى الشكل المقابل:

$\overline{BD} \cong \overline{CE}$ ، $\angle ADE \cong \angle AED$ ، $\angle B \cong \angle C$

أثبت أن: $\Delta ACE \cong \Delta ABD$

5 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

[1] $y^2 - ay + by - ab$ [2] $a^2 + 5a + 6$ [3] $y^3 + 1$

6 أوجد مجموعة حل المعادلة: $6x^2 - 2x = 0$ فى Z

7 قدر المنوال للتوزيع التكرارى الآتى بيانيًّا:

الفترات	0 –	2 –	4 –	6 –	8 –	المجموع
التكـرار	2	5	8	7	2	24

امتحان 8

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 أى من الأعداد الآتية عدد غير نسبى؟

(أ) $-\sqrt{4}$ (ب) $\sqrt[3]{27}$ (جـ) $\sqrt{8}$ (د) $3.\overline{6}$

2 إذا كان: $b \times \sqrt{5} = 1$ فما قيمة b؟

(أ) 1 (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $-\sqrt{5}$ (د) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

3 إذا كان: $x + y = 3$ ، $a - b = 5$ فإن: $x(a-b) + y(a-b) = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) 15 (جـ) 2 (د) -15

4 إذا كانت كثيرة الحدود $(4x^2 + kx + 9)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k؟

(أ) ± 6 (ب) ± 4 (جـ) ± 12 (د) ± 9

5 إذا كان: $xy + 9x + 5y + 45 = (x + a)(y + b)$، فما قيمة $a + b$؟

(أ) 4 (ب) -4 (جـ) 14 (د) -14

6 ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة $135°$؟

(أ) 7 (ب) 8 (جـ) 9 (د) 10

7 إذا كان: $\Delta ACH \cong \Delta BDE$ ، $m(\angle D) + m(\angle E) = 140°$، فإن $m(\angle A) = \dots\dots\dots$

(أ) $20°$ (ب) $30°$ (جـ) $40°$ (د) $60°$

8 المثلث الذى أطوال أضلاعه 6 سم، 8 سم، 11 سم هو مثلث

(أ) حاد الزوايا (ب) قائم الزاوية (جـ) منفرج الزاوية (د) متساوى الأضلاع

9 إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 64 ومركزها هو 48، فما الحد الأدنى لهذه المجموعة؟

(أ) 32 (ب) 112 (جـ) 16 (د) 23

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت $Y = [1, 5]$ ، $X =]-1, 3[$ فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى:

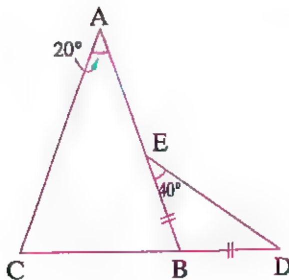
1 $X \cap Y$ 2 $X \cup Y$ 3 $Y - X$

2 اختصر لأبسط صورة المقدار: $\frac{(\sqrt{6})^{n+1} \times (\sqrt{3})^n}{2 \times (\sqrt{2})^{n-1}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 2$

3 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $D \in \overrightarrow{CB}$, $m(\angle DEB) = 40°$

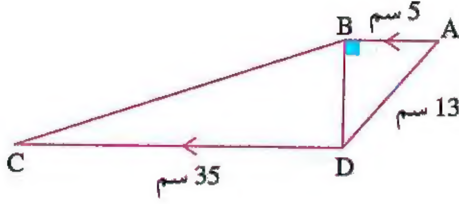
$BE = BD$, $m(\angle A) = 20°$ ، أثبت أن: $AB = AC$



4 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{AB} \; // \; \overline{DC}$

أوجد محيط المضلع ABCD



5 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

1 $3x^2 - 11x + 6$ 2 $16y^2 - 9$ 3 $a^3 - 27$

6 أوجد مجموعة حل المعادلة $y^2 - 7y + 12 = 0$ فى R

7 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	–5	–15	–25	–35	–45	المجموع
التكرار	5	20	40	25	10	**100**

امتحان 9

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كان: n عددًا صحيحًا، $n < \sqrt{13} < n + 1$، فإن: n = ...

(أ) 1   (ب) 2   (جـ) 3   (د) 4

2 المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{5} - 2$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) $2 + \sqrt{5}$ (ب) $2\sqrt{5}$ (جـ) $2 - \sqrt{5}$ (د) $\sqrt{5}$

3 عند إكمال المربع للمقدار: $(y^2 + 9)$ نضيف إليه ....

(أ) $\pm 3y$ (ب) $\pm 6y$ (جـ) $\pm 9y$ (د) $\pm 12y$

4 إذا كان: $x^2 - a^2 = (x - 5)(x + 5)$ فما قيمة a؟ ....

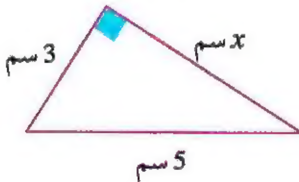
(أ) ± 1 (ب) ± 10 (جـ) ± 5 (د) ± 25

5 إذا كان: $(x - 5)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(x^2 - 2x - 15)$، فما العامل الآخر؟ ....

(أ) $x + 3$ (ب) $x - 3$ (جـ) $x + 5$ (د) $x - 5$

6 فى الشكل المقابل:

ما قيمة x؟ ....



(أ) 2   (ب) 3

(جـ) 4   (د) 5

7 إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين 4 سم، 8 سم، فما طول الضلع الثالث؟ ....

(أ) 4 سم   (ب) 8 سم   (جـ) 2 سم   (د) 12 سم

8 ما عدد أقطار المضلع السداسى المحدب؟ ....

(أ) 7 (ب) 8 (جـ) 9 (د) 10

9 إذا كان: $\sum f = 70$ ، $\sum f.\ x_m = 700$ ، ما الوسط الحسابى $\overline{x}$ ؟ ....

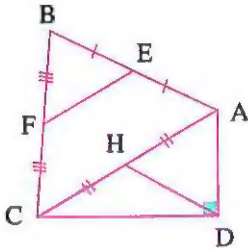
(أ) 10 (ب) 7 (جـ) 70 (د) 17

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت $B =]2 , 9[$ ، $A =]-\infty , 5[$ ، فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى:

[1] $A \cup B$ [2] $B`$ [3] $A - B$

2 رتب تصاعديًا الأعداد: $\sqrt{70}$ ، $-5\sqrt{2}$ ، 9 ، $\sqrt{62}$

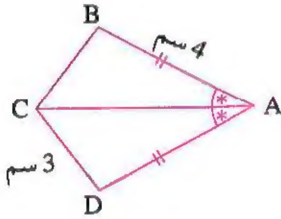


3 فى الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{DH}$ متوسطًا فى المثلث ADC القائم الزاوية فى D،

F , E منتصفى $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ على الترتيب

أثبت أن: DH = EF



4 فى الشكل المقابل:

CD = 3 سم، AB = 4 سم، $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

، $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle$ BAD

[1] برهن أن: Δ ACB $\cong$ Δ ACD

[2] أوجد محيط المضلع ABCD

5 أوجد مجموعة حل المعادلة: $16x^2 - 4x = 0$ فى R

6 حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا تامًّا:

[1] $12a + 2b - 8ba - 3$

[2] $x^2 + 14x + 49$

[3] $1 + 64m^3 n^3$

7 التوزيع التكرارى ذو المجموعات الآتى يبين أوزان 50 طردًا بريديًّا بالكيلوجرام:

المجموعات	0-	2-	4-	6-	8-	10-
التكرار	4	6	14	11	12	3

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

تقييم كتاب الوزارة

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 ما المعكوس الضربى للعدد، $-\sqrt{2}$ فى أبسط صورة؟

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 ما ناتج $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{2}$؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 2

3 إذا كان: $x^3 + y^3 = 20$, $x^2 - xy + y^2 = 4$ فما قيمة $2x + 2y$؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

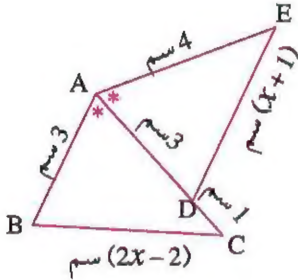
4 ما مجموعة حل المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ فى R؟

(أ) {1 , 3} (ب) {-1 , -3} (جـ) {1 , -3} (د) {-1 , 3}

5 إذا كان: $a + b = 2\sqrt{5}$, $c - d = \sqrt{5}$ فما قيمة المقدار $ac - ad + bc - bd$؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $3\sqrt{5}$ (جـ) 10 (د) 20

6 فى الشكل المقابل:



ما قيمة x؟ ....

(أ) 1

(ب) 2

(جـ) 3

(د) 4

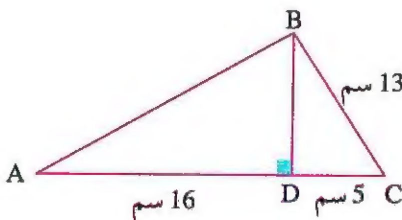
7 ما عدد أضلاع المضلع الذى قياسات زواياه الداخلية °1980؟

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 13

8 **إذا كانت بداية المجموعة هى 15 ومركزها 17.5 فما طول المجموعة؟**

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 20 (د) 25

9 فى الشكل المقابل:



ما طول $\overline{AB}$؟

(أ) 12 سم (ب) 25 سم

(جـ) 20 سم (د) 16 سم

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت $X =]-4 , 1]$ ، $Y = [-2 , 5[$ ، فأوجد على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد ما يأتى:

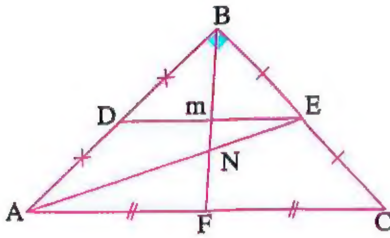
1 $X \cap Y$

2 $X \cup Y$

3 $Y - X$

2 اختصر المقدار $\frac{(\sqrt{3})^{2n+3}}{(\sqrt{2})^{1-n} \times (\sqrt{6})^{n-1}}$ لأبسط صورة، ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 0$

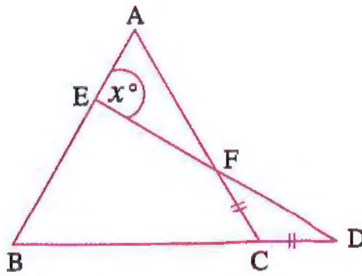
3 فى الشكل المقابل:



إذا كان طول $\overline{DE} = 6$ سم

فأوجد مع البرهان $\overline{MN}$

4 فى الشكل المقابل:



ABC مثلث متساوى الأضلاع

$CF = CD$ ، $\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$

أوجد مع البرهان قيمة x.

5 حلل كلًّا مما يأتى:

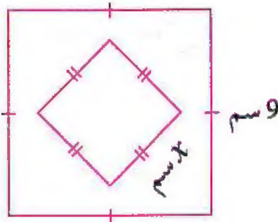
1 $4x^2 - 25$

2 $b^3 - 8$

3 $4x^2 + 14x - 30$

6 عبر عن مساحة الجزء المظلل فى الشكل المقابل

كحاصل ضرب عاملين.



7 أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	5-	15-	25-	35-	المجموع
التكرار	6	8	K	2	20